

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BARCELONATECH
OPE – ORGANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y DE EMPRESA (ASPECTOS TÉCNICOS, JURÍDICOS
Y ECONÓMICOS EN PRODUCCIÓN)

Modelos y herramientas de decisión. Teoría de Juegos III

MODELOS Y HERRAMIENTAS DE DECISIÓN 240EO023 – Máster Universitario en Ingeniería de Organización
(240MUEO) - ETSEIB

Joaquín Bautista-Valhondo

OPE-PROTHIUS – OPE-MSc.2016/21 240EO023 (20160319) - <http://futur.upc.edu/OPE> - www.prothius.com -
Departamento de Organización de Empresas – ETSEIB · UPC



PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

MHD' 16 – Juegos (III): 0
J. Bautista

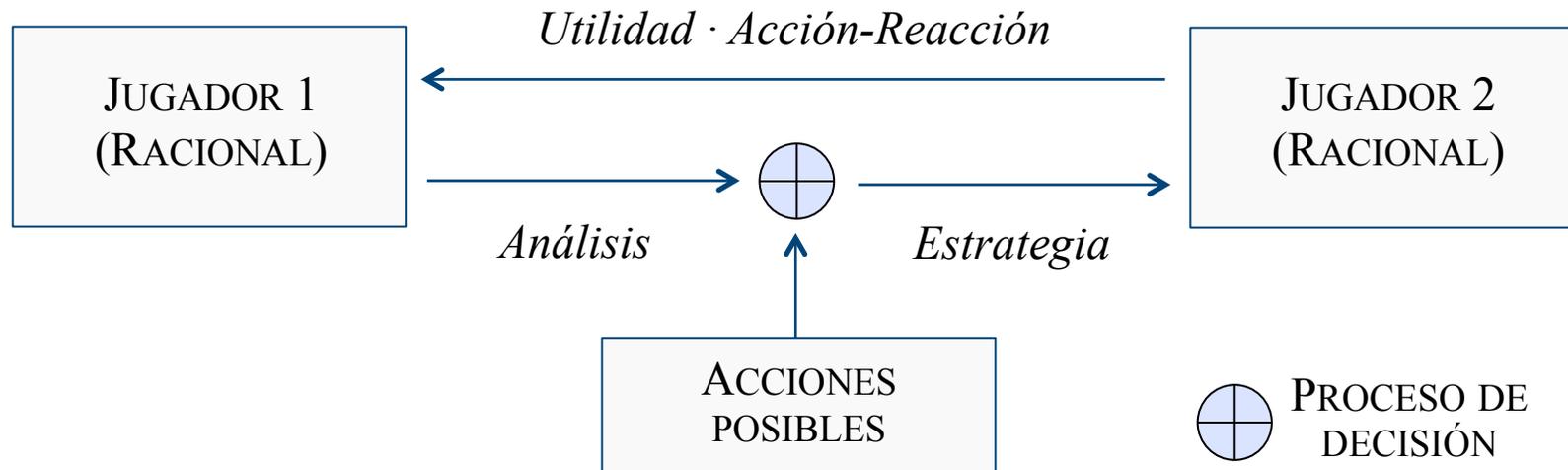
Contenido

- Decisiones en universo hostil · Juego
- Elementos de un juego de 2 personas
- Juegos de 2 personas. Clasificación y procedimientos
- Ejemplo 9 y 10. Presentación y resolución
- Juegos de suma general no cooperativos. Hipótesis y estrategias puras prudencial y contraprudencial
- Ejemplos 11, 12 y 13. Presentación y resolución estrategia pura prudencial
- Ejemplo 14: *Un acuerdo en el 221B de Baker Street*. Presentación y resolución estrategias puras prudencial y contraprudencial
- Juegos de suma general no cooperativos · Estrategias mixtas
- Ejemplo 14. Resolución estrategias mixtas
- Juegos de suma general cooperativos. Hipótesis, pagos laterales y arbitraje
- Ejemplo 14. Resolución con pagos laterales y arbitraje de NASH
- Ejemplo 15: *Campaña Alianza Vehículos eléctricos 360-EV*. Presentación y resolución



Decisiones en universo hostil · Juego

Esquema: Proceso de un Juego



Utilidad: Información que comunica el desarrollo del juego.

Acciones: Decisiones parciales tomadas por los jugadores.

Estrategia: Regla predeterminada que concreta las acciones ante cada circunstancia.

Análisis: Estudio de la situación.

Elementos de un juego

Jugadores: Dos o más decisores que en sus acciones, bajo una percepción hostil, emplean el criterio de minimizar su máxima pérdida o de maximizar su mínima ganancia.

Acciones: Decisiones tomadas cuando hay que jugar (elegir).

Estrategia: Regla predeterminada que especifica por completo cómo se va a responder a cada circunstancia posible en cada etapa del juego (v.g.- análisis de un movimiento en ajedrez).

Pagos: Utilidades (ganancias) asociadas a cada conjunto de estrategias de los jugadores. Los valores también pueden corresponder a costes (pérdidas) o frustraciones.

Jugada: Acciones simultáneas de los jugadores sin que éstos conozcan las elecciones de sus oponentes, dando como resultado una utilidad para cada jugador.

Supuestos:

- Ambos jugadores son racionales
- Ambos jugadores eligen sus estrategias para su único beneficio, sin compasión hacia el oponente.



Elementos de un juego de 2 personas

Elementos de un juego de 2 personas: (1) Estrategias del jugador_1, (2) Estrategias del jugador_2, y (3) Matrices de pagos de ambos jugadores.

Hipótesis: Al inicio del juego, cada jugador conoce: (1) las estrategias de que dispone, (2) las estrategias de su competidor y (3) las matrices de pagos de ambos jugadores.

1. Conjunto de estrategias de J1:

$$e_i \in E \quad (i = 1, \dots, m)$$

2. Conjunto de estrategias de J2:

$$s_j \in S \quad (j = 1, \dots, n)$$

3. Matriz de pagos (ganancias) de J1:

$$A = (a_{i,j})_{m \times n} \quad [\forall e_i \in E, \forall s_j \in S]$$

4. Matriz de pagos (ganancias) para J2:

$$B = (b_{i,j})_{m \times n} \quad [\forall e_i \in E, \forall s_j \in S]$$

J(1,2): a_{ij}, b_{ij}	s_1	s_2	...	s_n
e_1	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}	...	a_{1n}, b_{1n}
e_2	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}	...	a_{2n}, b_{2n}
...
e_m	a_{m1}, b_{m1}	a_{m2}, b_{m2}	...	a_{mn}, b_{mn}

Juego suma 0 $\Rightarrow B = -A : b_{ij} = -a_{ij} \quad [\forall e_i \in E, \forall s_j \in S]$

Juegos suma constante $\Rightarrow A + B = (c)_{m \times n} : a_{ij} + b_{ij} = c \quad \forall e_i, \forall s_j$

Juegos suma general $\Rightarrow A + B \neq (c)_{m \times n}$



Juegos de 2 personas. Clasificación y procedimientos

Clasificación:

1. Juegos de suma 0: $B = -A : b_{ij} = -a_{ij} \forall e_i \in E, \forall s_j \in S$
2. Juegos con suma constante: $A + B = (c)_{m \times n} : a_{ij} + b_{ij} = c \forall e_i \in E, \forall s_j \in S$
3. Juegos con suma general: $A + B \equiv (c)_{m \times n}$
 - 3.1. Juegos no cooperativos: Cooperación prohibida o imposible acordar estrategias conjuntas
 - 3.2. Juegos cooperativos: (i) Sin pagos laterales, (ii) Con pagos laterales

Procedimientos:

1. Determinar matriz de pagos para J1(A) y para J2(B) · Forma normal ($m \times n$)
2. Aplicar criterio max·min sobre A (J1) y max·mix sobre B (J2):
 - 2.1. Juego no cooperativo:
 - Con punto de silla: Hacer: $\{V_{J1}^* = a_{i^*,j^*}, V_{J2}^* = b_{i^*,j^*}\}$ con (i^*, j^*) estrategias puras óptimas (J1, J2)
 - Sin punto de silla: Resolver con estrategias mixtas: $\left\{ \begin{array}{l} - \text{Fórmulas si: } (m \times n) = (2 \times 2) \\ - \text{Gráfico, sistema o PL si: } (m \times n) \geq (2 \times 2) \end{array} \right\}$
 - 2.2. Juego cooperativo:
 - Determinar puntos de equilibrio y conjunto de entente · Aplicar pagos laterales y arbitrajes
3. Finalizar.



Juegos de suma constante

Hipótesis: Al inicio del juego, cada jugador conoce: (1) las estrategias de que dispone, (2) las estrategias de su competidor y (3) las matrices de pagos de ambos jugadores.

Hipótesis: $a_{ij} + b_{ij} = c \quad \forall e_i \in E, \forall s_j \in S$

Transformación en juego suma 0:

1. Hacer: $\left\{ \begin{array}{l} \text{J1: } a'_{ij} = a_{ij} - c/2 \\ \text{J2: } b'_{ij} = b_{ij} - c/2 \end{array} \right\} \forall e_i \in E, \forall s_j \in S \Rightarrow a'_{ij} + b'_{ij} = a_{ij} + b_{ij} - c = 0 \quad \forall e_i \in E, \forall s_j \in S$

2. Resolver Juego suma 0 con $A' = \{a'_{ij} \quad \forall e_i \in E, \forall s_j \in S\}$

J(1,2): a_{ij}, b_{ij}	s_1	s_2	.	s_n	→	J1: a'_{ij}	s_1	s_2	.	s_n
e_1	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}	.	a_{1n}, b_{1n}		e_1	a'_{11}	a'_{12}	.	a'_{1n}
e_2	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}	.	a_{2n}, b_{2n}		e_2	a'_{21}	a'_{22}	.	a'_{2n}
.
e_m	a_{m1}, b_{m1}	a_{m2}, b_{m2}	.	a_{mn}, b_{mn}		e_m	a'_{m1}	a'_{m2}	.	a'_{mn}

Ejemplo 9. Presentación

Ejemplo 9 · Piedra - Papel - Tijera no simétrico en pagos · Enunciado:

Dos jugadores (J1 y J2) apuestan 5€ por partida (10€ en el bote). El juego es PIEDRA · PAPEL · TIJERA con las siguientes reglas de reparto del bote: PIEDRA gana a TIJERA (10, 0), TIJERA gana a PAPEL (9, 1) y PAPEL gana a PIEDRA (8, 2); si J1 y J2 coinciden al mostrar sus manos, empatan y recogen sus 5€ (5, 5). Las utilidades de J1 y J2 se muestran en la Tabla-9.0

Estrategias J1:

e_1 : Mostrar mano PIEDRA

e_2 : Mostrar mano PAPEL

e_3 : Mostrar mano TIJERA

Estrategias J2:

s_1 : Mostrar mano PIEDRA

s_2 : Mostrar mano PAPEL

s_3 : Mostrar mano TIJERA

J1, J2: a_{ij}, b_{ij}	s1	s2	s3
e1	5, 5	2, 8	10, 0
e2	8, 2	5, 5	1, 9
e3	0, 10	9, 1	5, 5

Tabla-9.0: Tabla de utilidades (J1,J2). Euros que se reparten J1 y J2 en cada partida del juego PIEDRA · PAPEL · TIJERA.



Ejemplo 9. Resolución juego suma constante (1)

Ejemplo 9 · Piedra - Papel - Tijera no simétrico en pagos · Resolución suma constante:

Estrategias J1: $\left\{ \begin{array}{l} e_1 : \text{Mostrar Piedra} \\ e_2 : \text{Mostrar Papel} \\ e_3 : \text{Mostrar Tijera} \end{array} \right\}$

Estrategias J2: $\left\{ \begin{array}{l} s_1 : \text{Mostrar Piedra} \\ s_2 : \text{Mostrar Papel} \\ s_3 : \text{Mostrar Tijera} \end{array} \right\}$

Se cumple:

$$a_{ij} + b_{ij} = 10 \quad \forall e_i \in E, \forall s_j \in S$$

$$1. \text{ Hacer: } \left\{ \begin{array}{l} \text{J1: } a'_{ij} = a_{ij} - 5 \\ \text{J2: } b'_{ij} = b_{ij} - 5 \end{array} \right\} \forall e_i \in E, \forall s_j \in S$$

2. Resolver Juego suma 0

Tabla-9.0: Tabla de utilidades (J1,J2). Euros que se reparten J1 y J2 en cada partida del juego PIEDRA · PAPEL · TIJERA.

J1, J2: a_{ij}, b_{ij}	s1	s2	s3
e1	5, 5	2, 8	10, 0
e2	8, 2	5, 5	1, 9
e3	0, 10	9, 1	5, 5

Tabla-9.1: Tabla de utilidades J1. Euros que J1 gana a J2 en cada partida del juego PIEDRA · PAPEL · TIJERA.

J1: a'_{ij}	s1	s2	s3
e1	0	-3	5
e2	3	0	-4
e3	-5	4	0



Ejemplo 9. Resolución juego suma constante (2)

Ejemplo 9 · Piedra - Papel - Tijera no simétrico en pagos · Resolución suma constante:

Estrategias J1: $\left\{ \begin{array}{l} e_1 : \text{Mostrar Piedra} \\ e_2 : \text{Mostrar Papel} \\ e_3 : \text{Mostrar Tijera} \end{array} \right\}$

Estrategias J2: $\left\{ \begin{array}{l} s_1 : \text{Mostrar Piedra} \\ s_2 : \text{Mostrar Papel} \\ s_3 : \text{Mostrar Tijera} \end{array} \right\}$

Tabla-9.2: Tabla de utilidades J1. Euros que J1 gana a J2 en cada partida del juego PIEDRA · PAPEL · TIJERA. Valor (-3,3)

J1: a'_{ij}	s1	s2	s3	Min	
e1	0	-3	5	-3	← maxmin
e2	3	0	-4	-4	
e3	-5	4	0	-5	
Max	3	4	5		

↑ minmax

$$\text{PL-J1: } \max V \quad (0)$$

s.a:

$$3x_2 - 5x_3 \geq V \quad (1)$$

$$-3x_1 + 4x_3 \geq V \quad (2)$$

$$5x_1 - 4x_2 \geq V \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (4)$$

Resultado:

$$x_1^* = 4/12$$

$$x_2^* = 5/12$$

$$x_3^* = 3/12$$

$$V^* = 0$$

$$\text{PL-J2: } \min \check{V} \quad (0')$$

s.a:

$$-3y_2 + 5y_3 \leq \check{V} \quad (1')$$

$$3y_1 - 4y_3 \leq \check{V} \quad (2')$$

$$-5y_1 + 4y_2 \leq \check{V} \quad (3')$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \quad (4')$$

Resultado:

$$y_1^* = 4/12$$

$$y_2^* = 5/12$$

$$y_3^* = 3/12$$

$$\check{V}^* = 0$$



Ejemplo 10. Presentación

Ejemplo 10 · Campaña ventas Vehículos eléctricos EV-2016 · Enunciado:

Dos marcas automovilísticas (J1 y J2) diseñan un plan para aumentar las ventas de una gama de vehículos eléctricos en España en el próximo año. Ambas harán promoción a través de tres medios de difusión: Televisión, Tres60-m e Internet. Los cientos de vehículos (suma constante) que J1 y J2 prevén vender en 2016, en función de la demanda histórica (2011-2015) y de sus estrategias, se recogen en la Tabla-10.0

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en TV

e_2 : Promoción Tres60-m

e_3 : Promoción en Internet

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en TV

s_2 : Promoción Tres60-m

s_3 : Promoción en Internet

J1, J2: a_{ij}, b_{ij}	s_1	s_2	s_3
e_1	5, 7	9, 3	7, 5
e_2	7, 5	8, 4	6, 6
e_3	8, 4	4, 8	4, 8

Tabla-10.0: Tabla de utilidades (J1,J2). Previsión de ventas (cientos de vehículos) de J1 y J2 con la campaña EV-2016.



Ejemplo 10. Resolución juego suma constante (1)

Ejemplo 10 · Campaña ventas Vehículos eléctricos EV-2016 · Resolución suma constante:

Estrategias J1: $\left\{ \begin{array}{l} e_1 : \text{Promoción TV} \\ e_2 : \text{Promoción Tres60-m} \\ e_3 : \text{Promoción Internet} \end{array} \right\}$

Estrategias J2: $\left\{ \begin{array}{l} s_1 : \text{Promoción TV} \\ s_2 : \text{Promoción Tres60-m} \\ s_3 : \text{Promoción Internet} \end{array} \right\}$

Tabla-10.0: Tabla de utilidades (J1,J2). Previsión de ventas (cientos de vehículos) de J1 y J2 con la campaña EV-2016.

J1, J2: a_{ij}, b_{ij}	s1	s2	s3
e1	5, 7	9, 3	7, 5
e2	7, 5	8, 4	6, 6
e3	8, 4	4, 8	4, 8

Se cumple:

$$a_{ij} + b_{ij} = 12 \quad \forall e_i \in E, \forall s_j \in S$$

$$1. \text{ Hacer: } \left\{ \begin{array}{l} \text{J1: } a'_{ij} = a_{ij} - 6 \\ \text{J2: } b'_{ij} = b_{ij} - 6 \end{array} \right\} \forall e_i \in E, \forall s_j \in S$$

2. Resolver Juego suma 0

Tabla-10.1: Tabla de utilidades J1. Cientos de vehículos que J1 captura a J2 en la campaña EV-2016.

J1: a'_{ij}	s1	s2	s3
e1	-1	3	1
e2	1	2	0
e3	2	-2	-2



Ejemplo 10. Resolución juego suma constante (2)

Ejemplo 10 · Campaña ventas Vehículos eléctricos EV-2016 · Resolución suma constante:

Estrategias J1: $\left\{ \begin{array}{l} e_1 : \text{Promoción en TV} \\ e_2 : \text{Promoción en Tres60-m} \\ e_3 : \text{Promoción en Internet} \end{array} \right\}$

J1: a'_{ij}	s1	s2	s3
e1	-1	3	1
e2	1	2	0
e3	2	-2	-2

Tabla-10.1: Tabla de utilidades J1. Cientos de vehículos que J1 captura a J2 en la campaña EV-2016.

Estrategias J2: $\left\{ \begin{array}{l} s_1 : \text{Promoción en TV} \\ s_2 : \text{Promoción en Tres60-m} \\ s_3 : \text{Promoción en Internet} \end{array} \right\}$

J1: a'_{ij}	s1	s2	s3
e1	-1	3	1
e2	1	2	0
e3	2	-2	-2

Tabla-10.2: Tabla de pagos. Dominancias J2: estrategia s_3 domina a estrategia s_2 . Se suprime s_2 .

Ejemplo 10. Resolución juego suma constante (3)

Ejemplo 10 · Campaña ventas Vehículos eléctricos EV-2016 · Resolución suma constante:

Estrategias J1: $\left\{ \begin{array}{l} e_1 : \text{Promoción TV} \\ e_2 : \text{Promoción Tres60-m} \\ e_3 : \text{Promoción Internet} \end{array} \right\}$

Estrategias J2: $\left\{ \begin{array}{l} s_1 : \text{Promoción TV} \\ s_2 : \text{Promoción Tres60-m} \\ s_3 : \text{Promoción Internet} \end{array} \right\}$

Tabla-10.3: Tabla de utilidades J1. Cientos de vehículos que J1 captura a J2 en la campaña EV-2016. Valor (0, 1)

J1: a'_{ij}	s1	s3	Min	
e1	-1	1	-1	maxmin ←
e2	1	0	0	
e3	2	-2	-2	
Max	2	1		↑ minmax

$$\text{PL-J1: } \max V \quad (0)$$

s.a:

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq V \quad (1)$$

$$x_1 - 2x_3 \geq V \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (4)$$

Resultado:

$$x_1^* = 1/3$$

$$x_2^* = 2/3$$

$$x_3^* = 0$$

$$V^* = 1/3$$

$$\text{PL-J2: } \min \check{V} \quad (0')$$

s.a:

$$-y_1 + y_3 \leq \check{V} \quad (1')$$

$$y_1 \leq \check{V} \quad (2')$$

$$2y_1 - 2y_3 \leq \check{V} \quad (3')$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \quad (4')$$

Resultado:

$$y_1^* = 1/3$$

$$y_2^* = 0$$

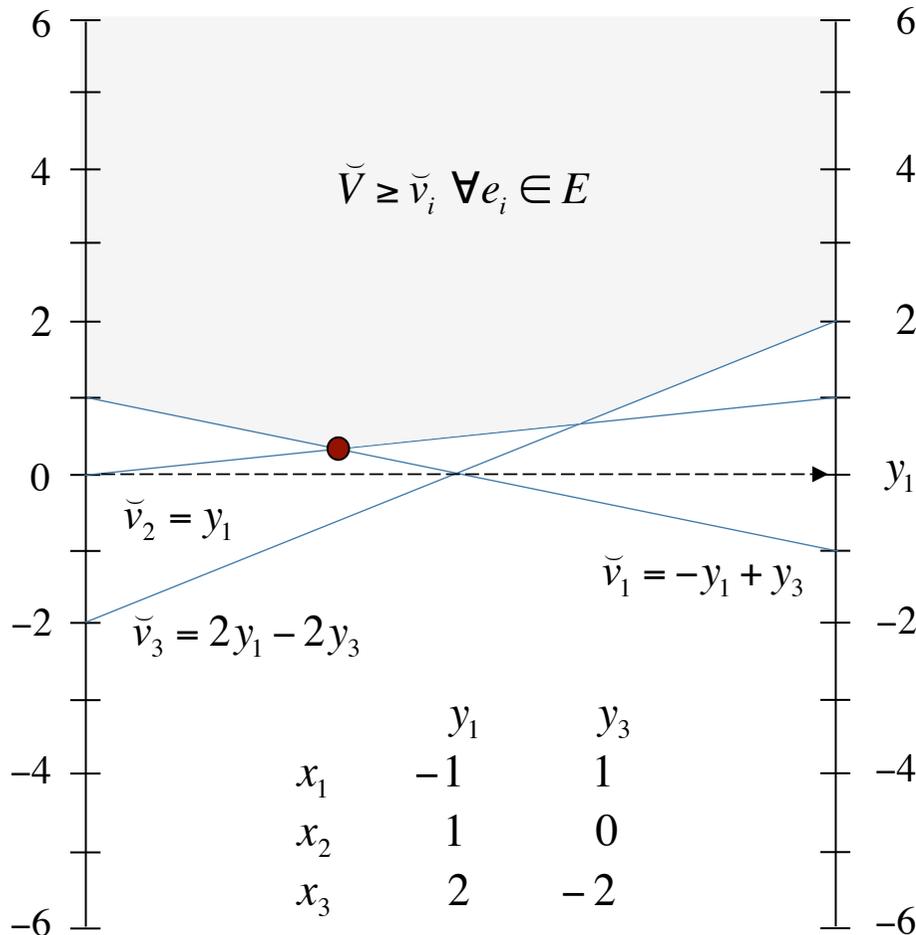
$$y_3^* = 2/3$$

$$\check{V}^* = 1/3$$



Ejemplo 10. Resolución juego suma constante (4)

Ejemplo 10 · Campaña ventas Vehículos eléctricos EV-2016 · Resolución suma constante:



$$\begin{aligned} \text{PL-J2: } \min \check{V} \quad (0') & & \text{PL-J1: } \max V \quad (0) \\ \text{s.a:} & & \text{s.a:} \\ -y_1 + y_3 \leq \check{V} \quad (1') & & -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq V \quad (1) \\ y_1 \leq \check{V} \quad (2') & & x_1 - 2x_3 \geq V \quad (3) \\ 2y_1 - 2y_3 \leq \check{V} \quad (3') & & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (4) \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \quad (4') & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{v}_1 = \check{v}_2 = \check{V} & \Rightarrow -2y_1 + 1 = y_1 \\ y_1^* = \frac{1}{3} \quad y_3^* = \frac{2}{3} \quad \check{V}^* = y_1^* = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_3 = V \\ \check{v}_3^* = -\frac{2}{3} < \check{V}^* \Rightarrow x_3^* = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x_1 + x_2 = x_1$$

$$x_1^* = \frac{1}{3} \quad x_2^* = \frac{2}{3} \quad V^* = x_1^* = \frac{1}{3}$$

Valor del Juego J1: $V = 1/3$ · J1 captura a J2 33 vehículos (al menos) con la estrategia mixta.



Juegos de suma general no cooperativos · Hipótesis

Condiciones e hipótesis:

1. Cada jugador (J1 y J2) intentará conseguir su máxima ganancia.
2. En juego de suma general, la máxima ganancia de J1 no supone la máxima pérdida de J2.
3. Ningún oponente racional estará dispuesto a jugar perdiendo más de lo inevitable.
4. Los jugadores J1 y J2 determinarán sus estrategias max·min sobre sus matrices de pagos respectivas (J1 sobre A y J2 sobre B), así ambos aseguran unas ciertas ganancias mínimas denominadas *niveles de certeza*. Aquí, el jugador emplea su *estrategia prudencial* (pura o mixta).
5. Los jugadores no colaborarán buscando puntos de equilibrio para obtener unas ganancias por encima de sus niveles de certeza.
6. Abandonar la estrategia max·min y adoptar la min·max puede suponer un incremento de la ganancia de un jugador si el contrario se mantiene en su estrategia max·min.
7. Obviamente, los jugadores J1 y J2 podrán determinar sus estrategias mix·max usando las matrices de pagos de sus oponentes respectivos (J1 sobre B y J2 sobre A), pudiendo limitar así las ganancias del contrario. Aquí, el jugador emplea su *estrategia contraprudencial* (pura o mixta).
8. El empleo de la *estrategia prudencial* asegura el *nivel de certeza*, mientras que el empleo de la *estrategia contraprudencial* limita el *nivel de certeza* del contrario.



Juegos de suma general no cooperativos · Estrategias puras

Estrategias puras · Nomenclatura y criterios:

Sean :

E, S Conjunto de estrategias de J1, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Conjunto de estrategias de J2, $S = \{s_1, \dots, s_m\}$

$a_{i,j}, A$ Utilidad de J1 con las estrategias $e_i \in E$ de J1 y $s_j \in S$ de J2 · $A = (a_{i,j})_{m \times n}$: matriz de pagos de J1

$b_{i,j}, B$ Utilidad de J2 con las estrategias $e_i \in E$ de J1 y $s_j \in S$ de J2 · $B = (b_{i,j})_{m \times n}$: matriz de pagos de J2

Postura	Jugador: Estrategia	Función	Estrategia pura óptima
Prudente	J1: maxmin (Prudencial)	$f(A, \vec{e}, \vec{s}) = \max_{e_i \in E} \left\{ \min_{s_j \in S} (a_{i,j}) \right\}$	$e^* = \operatorname{argmax}_{e_i \in E} \left\{ \min_{s_j \in S} (a_{i,j}) \right\}$
Prudente	J2: maxmin (Prudencial)	$f(B, \vec{s}, \vec{e}) = \max_{s_j \in S} \left\{ \min_{e_i \in E} (b_{i,j}) \right\}$	$s^* = \operatorname{argmax}_{s_j \in S} \left\{ \min_{e_i \in E} (b_{i,j}) \right\}$
Hostil	J1: minmax (Contrapudencial)	$f(B, \vec{e}, \vec{s}) = \min_{e_i \in E} \left\{ \max_{s_j \in S} (b_{i,j}) \right\}$	$e^* = \operatorname{argmin}_{e_i \in E} \left\{ \max_{s_j \in S} (b_{i,j}) \right\}$
Hostil	J2: minmax (Contrapudencial)	$f(A, \vec{s}, \vec{e}) = \min_{s_j \in S} \left\{ \max_{e_i \in E} (a_{i,j}) \right\}$	$s^* = \operatorname{argmin}_{s_j \in S} \left\{ \max_{e_i \in E} (a_{i,j}) \right\}$

Punto de equilibrio:

El par de estrategias puras $(e^*, s^*) \equiv (i^*, j^*)$ está en equilibrio si: $(a_{i^*, j^*} \geq a_{i, j^*} \forall e_i \in E) \wedge (b_{i^*, j^*} \geq b_{i^*, j} \forall s_j \in S)$



Ejemplo 11. Presentación

Ejemplo 11 · Dilema del Prisionero · Enunciado:

Dos delincuentes, J1 y J2, son investigados por corrupción y malversación de dinero público. La juez reconoce que no tiene pruebas suficientes para obtener una condena por el cargo principal -10 años de prisión-, pero sí para que sean sentenciados a 3 años por otros cargos. La justicia ofrece un pacto a cada delincuente en privado: si uno de ellos testifica contra el otro, al uno le caerá 1 año de prisión y al otro la condena principal; si ambos testifican contra su oponente, la condena para los dos será de 5 años. La Tabla-11.0 recoge las condiciones del juego.

Estrategias J1:

e_1 : Encubrir a J2

e_2 : Testificar contra J2

Estrategias J2:

s_1 : Encubrir a J1

s_2 : Testificar contra J1

J1 J2: a_{ij}, b_{ij}	s_1	s_2
e_1	7, 7	0, 9
e_2	9, 0	5, 5

Tabla-11.0: Tabla de utilidades (J1,J2). Ahorro en años de prisión (sobre 10) de J1 y J2 en el “Dilema del Prisionero”.



Ejemplo 11. Resolución · Estrategia pura prudencial

Ejemplo 11 · Dilema del Prisionero · Resolución J1 y J2 max-min (prudencial):

Estrategias J1:

e_1 : Encubrir a J2

e_2 : Testificar contra J2

Estrategias J2:

s_1 : Encubrir a J1

s_2 : Testificar contra J1

Tabla-11.1: Tabla de utilidades de J1 y J2 (·): Ahorros de J1 y J2 (·) en años de prisión sobre 10 años de condena en el “Dilema del Prisionero”.

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s1	s2	Min	
e1	7 (7)	0 (9)	0	
e2	9 (0)	5 (5)	5	← max min
Min	(0)	(5)		↑ max min

Punto de equilibrio: $(J1, J2) \rightarrow (e_2, s_2)$

Si $J1 \downarrow e_2 \Rightarrow J1 \rightarrow e_1$: J1 condenado a 10 años (ahorro 0) y J2 condenado a 1 año (ahorro 9)

Si $J2 \downarrow s_2 \Rightarrow J2 \rightarrow s_1$: J2 condenado a 10 años (ahorro 0) y J1 condenado a 1 año (ahorro 9)

Valor del Juego: $V_1 = V_2 = 5$. J1 y J2 condenados a 5 años (ahorro 5) · Punto $(J1, J2) \rightarrow (e_2, s_2)$

Complicidad: Si $(J1, J2) \rightarrow (e_1, s_1) \Rightarrow$ J1 y J2 condenados a 3 años (ahorro 7 años para cada jugador)



Ejemplo 12. Presentación

Ejemplo 12 · Política armamentista de 2 potencias · Enunciado:

Dos potencias enfrentadas, J1 y J2, deben decidir su política armamentista. Para este juego peligroso, las estrategias de ambas potencias son idénticas: (1) armarse por posible guerra y negarse a cooperar y (2) Desarmarse, acordar la prohibición de determinadas armas y cooperar. Las utilidades (suma general) de J1 y J2 y los resultados de sus acciones, en función de las estrategias de ambos jugadores, se recogen en la Tabla-12.0.

Estrategias J1:	J1 J2: a_{ij}, b_{ij}	s1	s2
e_1 : Armarse	e1	2, 2	8, 0
e_2 : Cooperar con J2	e2	0, 8	4, 4
Estrategias J2:	(e, s): Resultado	s1	s2
s_1 : Armarse	e1	Carrera armamentista	Solo se arma J1
s_2 : Cooperar con J1	e2	Solo se arma J2	Desarme

Tabla-12.0: Tabla de utilidades (J1,J2) y resultados de las acciones políticas (J1,J2) en el problema “Política armamentista de 2 potencias”.



Ejemplo 12. Resolución · Estrategia pura prudencial

Ejemplo 12 · Política armamentista 2 potencias · Resolución J1 y J2 max-min (prudencial):

Estrategias J1:

e_1 : Armarse

e_2 : Cooperar con J2

Estrategias J2:

s_1 : Armarse

s_2 : Cooperar con J1

Tabla-12.1: Tabla de utilidades de J1 y J2 (): Puntuación sobre resultados de cada par de acciones en “Política armamentista de 2 potencias”.

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s1	s2	Min	
e1	2 (2)	8 (0)	2	← max min
e2	0 (8)	4 (4)	0	
Min	(2)	(0)		↑ max min

Punto de equilibrio: $(J1, J2) \rightarrow (e_1, s_1)$

Si $J1 \downarrow e_1 \Rightarrow J1 \rightarrow e_2$: J1 queda desarmado (ganancia 0) y J2 se arma en solitario (ganancia 8)

Si $J2 \downarrow s_1 \Rightarrow J2 \rightarrow s_2$: J2 queda desarmado (ganancia 0) y J1 se arma en solitario (ganancia 8)

Valor del Juego: $V_1 = V_2 = 2$. Punto de silla: $(J1, J2) \rightarrow (e_1, s_1)$ equilibrio en guerra fría (ganancias 2)

Complicidad: Si $(J1, J2) \rightarrow (e_2, s_2) \Rightarrow$ J1 y J2 se desarman, pseudo-equilibrio en paz (ganancias 4)



Ejemplo 13. Presentación

Ejemplo 13 · El caso del tenista de élite · Enunciado:

Un tenista de élite (J1) es acusado de dopaje por un personaje político (J2). Dada la honorable trayectoria del deportista es poco probable que la acusación esté fundamentada y se trate, por tanto, de una estúpida injuria. Las opciones de J1 son: (1) demandar al político o (2) callar y observar. Las acciones de J2 son: (1) mantener la acusación o (2) retractarse públicamente. Las utilidades de J1 y J2 y los resultados de sus acciones se recogen en la Tabla-13.0.

Estrategias J1:	J1 J2: a_{ij}, b_{ij}	s1	s2
e_1 : Demandar a J2	e1	7, 3	10, -5
e_2 : Mantenerse en silencio	e2	-5, 10	0, 0
Estrategias J2:	(e,s): Resultado	s1	s2
s_1 : Mantener la acusación	e1	Juicio · ventaja J1	Imagen de J2 dañada
s_2 : Retractarse públicamente	e2	Imagen de J1 dañada	Entente cordial

Tabla-13.0: Tabla de utilidades (J1,J2) y resultados de las acciones civiles de J1 vs. J2 en “El caso del tenista de élite”.

Ejemplo 13. Resolución · Estrategia pura prudencial

Ejemplo 13 · El caso del tenista de élite · Resolución J1 y J2 max-min (prudencial):

Estrategias J1:

e_1 : Demandar a J2

e_2 : Mantenerse en silencio

Estrategias J2:

s_1 : Mantener la acusación

s_2 : Retractarse públicamente

Tabla-13.1: Tabla de utilidades de J1 y J2 (\cdot): Puntuación sobre resultados de cada par de acciones en “El caso del tenista de élite”.

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s_1	s_2	Min	
e_1	7 (3)	10 (-5)	7	← max min
e_2	-5 (10)	0 (0)	-5	
Min	(3)	(-5)		↑ max min

Punto de equilibrio: $(J1, J2) \rightarrow (e_1, s_1)$

Si $J1 \downarrow e_1 \Rightarrow J1 \rightarrow e_2$: J1 con su imagen dañada (ganancia -5) y J2 sale impune (ganancia 10)

Si $J2 \downarrow s_1 \Rightarrow J2 \rightarrow s_2$: J2 con su imagen dañada (ganancia -5) y J1 gana el juicio sin gastos (ganancia 10)

Valor del Juego: $(V_1, V_2) = (7, 3)$. Punto de silla: $(J1, J2) \rightarrow (e_1, s_1)$ equilibrio bajo la Ley (ganancias 7 y 3)

Complicidad: Si $(J1, J2) \rightarrow (e_2, s_2) \Rightarrow J2$ se disculpa públicamente y J1 acepta las disculpas (ganancias 0)



Ejemplo 14. Presentación

Ejemplo 14 · Un acuerdo en el 221B de Baker Street · Enunciado:

Holmes y Watson (J1 y J2) han cerrado un caso y, como viene siendo habitual, van a celebrarlo poniéndose en contacto con las calles de Londres. Watson prefiere la ópera, Holmes el teatro... No hay acuerdo! Watson propone un juego a Holmes: en cada salida, ambos escribirán en un papel su apuesta del día, según las utilidades estables (de 0 a 4) de tres opciones: (1) ir al teatro, (2) ir a la ópera y (3) quedarse en casa o *ir por libre*. Tanto las utilidades actuales de Holmes y Watson como los resultados de sus acciones se recogen en la Tabla-14.0.

J1 J2: a_{ij}, b_{ij}	s1	s2
Estrategias J1:		
e_1 : Apostar por ir al teatro	4, 2	0, 1
e_2 : Apostar por ir a la ópera	0, 1	2, 4
	s1	s2
Estrategias J2:		
s_1 : Apostar por ir al teatro	H&W van al teatro	H&W 221B o libres
s_2 : Apostar por ir a la ópera	H&W 221B o libres	H&W van a la ópera

Tabla-14.0: Tabla de utilidades actuales (J1,J2) y resultados de apuestas Holmes vs. Watson en “Un acuerdo en el 221B de Baker Street”.



Ejemplo 14. Resolución · Estrategia pura prudencial

Ejemplo 14 · Un acuerdo en el 221B de Baker Street · H y W max-min (prudencial):

Estrategias J1 · Holmes:

e_1 : Apostar por ir al teatro

e_2 : Apostar por ir a la ópera

Estrategias J2 · Watson:

s_1 : Apostar por ir al teatro

s_2 : Apostar por ir a la ópera

Tabla-14.1: Tabla de utilidades de Holmes y Watson (·): Puntuación sobre resultados de las acciones en “Un acuerdo en el 221B de Baker Street”.

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s_1	s_2	Min	
e_1	4 (2)	0 (1)	0	← max min
e_2	0 (1)	2 (4)	0	← max min
Min	(1) ↑ max min	(1) ↑ max min		

Puntos de equilibrio: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } (H \rightarrow e_1) \wedge (W \rightarrow s_1) \Rightarrow (V_H, V_W) = (4, 2). \text{ Punto de equilibrio ventaja Holmes} \\ \text{Si } (W \rightarrow s_2) \wedge (H \rightarrow e_2) \Rightarrow (V_H, V_W) = (2, 4). \text{ Punto de equilibrio ventaja Watson} \end{array} \right\}$

Si Holmes y Watson emplean estrategia prudencial su nivel de confianza es $(V_H, V_W) = (0, 1)$.

Holmes y Watson deben pasar a estrategias mixtas para aumentar su nivel de confianza.

Nota.- Si Holmes y Watson apuestan azarosamente, pueden salir de casa el 50% de las ocasiones.



Ejemplo 14. Resolución · Estrategia pura contraprudencial

Ejemplo 14 · Un acuerdo en el 221B de Baker Street · H y W min-max (contraprudencial):

Estrategias J1 · Holmes:

e_1 : Apostar por ir al teatro

e_2 : Apostar por ir a la ópera

Estrategias J2 · Watson:

s_1 : Apostar por ir al teatro

s_2 : Apostar por ir a la ópera

Tabla-14.1: Tabla de utilidades de Holmes y Watson (·): Puntuación sobre resultados de las acciones en “Un acuerdo en el 221B de Baker Street”.

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s_1	s_2	Max	
e_1	4 (2)	0 (1)	(2)	← min max
e_2	0 (1)	2 (4)	(4)	
Max	4	2		↑ min max

Puntos de equilibrio: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } (H,W) \rightarrow (e_1, s_1) \Rightarrow (V_H, V_W) = (4, 2) : \text{ventaja Holmes} \\ \text{Si } (H,W) \rightarrow (e_2, s_2) \Rightarrow (V_H, V_W) = (2, 4) : \text{ventaja Watson} \end{array} \right\}$

Punto contraprudencial: $(H, W) \rightarrow (e_1, s_2) \Rightarrow \text{Ganancias } (V_H, V_W) = (0, 1)$.

Holmes y Watson deben pasar a estrategias mixtas para aumentar su utilidad.

Nota.- En esta ocasión, si Holmes y Watson jugaran a la contra pura serían *estúpidos*.



Juegos de suma general no cooperativos · Estrategias mixtas

Nomenclatura:

- E, S Conjunto de estrategias de J1, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Conjunto de estrategias de J2, $S = \{s_1, \dots, s_m\}$
 $a_{i,j}, A$ Utilidad de J1 con las estrategias $e_i \in E$ de J1 y $s_j \in S$ de J2 · $A = (a_{i,j})_{m \times n}$: matriz de pagos de J1
 $b_{i,j}, B$ Utilidad de J2 con las estrategias $e_i \in E$ de J1 y $s_j \in S$ de J2 · $B = (b_{i,j})_{m \times n}$: matriz de pagos de J2
 x_i, y_j Probabilidad (x_i) de que J1 use la estrategia $e_i \in E$ · Probabilidad (y_j) de que J2 use la estrategia $s_j \in S$
 v_{1j}, v_{2i} Ganancia (v_{1j}) de J1 ante la estrategia de J2 $s_j \in S$ · Ganancia (v_{2i}) de J2 ante la estrategia de J1 $e_i \in E$
 V_1, V_2 Ganancias de J1 y J2 · Ganancias mínimas (J1: V_1^{\min} , J2: V_2^{\min}) · Ganancias máximas (J1: V_1^{\max} , J2: V_2^{\max})

Estrategias mixtas · PL formulación:

PL-J1 (P) Prudencial:

$$\max V_1^{\min} = \min_{1 \leq j \leq n} \{v_{1j}\}$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} x_i \geq V_1^{\min} \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq m$$

PL-J2 (P) Prudencial:

$$\max V_2^{\min} = \min_{1 \leq i \leq m} \{v_{2i}\}$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^n b_{i,j} y_j \geq V_2^{\min} \quad 1 \leq i \leq m$$

$$y_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

PL-J1 (CP) Contra-(P):

$$\min V_2^{\max} = \max_{1 \leq i \leq m} \{v_{2i}\}$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^m b_{i,j} x_i \leq V_2^{\max} \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq m$$

PL-J2 (CP) Contra-(P):

$$\min V_1^{\max} = \max_{1 \leq j \leq n} \{v_{1j}\}$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \leq V_1^{\max} \quad 1 \leq i \leq m$$

$$y_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq n$$



Ejemplo 14. Resolución · Estrategia mixta prudencial

Ejemplo 14 · Un acuerdo en el 221B de Baker Street · H y W mixta prudencial:

Estrategias J1:

e_1 : Apostar por ir al teatro

e_2 : Apostar por ir a la ópera

Estrategias J2:

s_1 : Apostar por ir al teatro

s_2 : Apostar por ir a la ópera

Tabla-14.1: Tabla de utilidades de Holmes y Watson (·): Puntuación sobre resultados de las acciones en “Un acuerdo en el 221B de Baker Street”.

J1 J2: $a_{ij} (b_{ij})$	s_1	s_2	Min
e_1	4 (2)	0 (1)	0
e_2	0 (1)	2 (4)	0
Min	(1)	(1)	

$$\text{PL-J1: } \max V_1^{\min} \quad (0)$$

s.a:

$$4x_1 \geq V_1^{\min} \quad (1)$$

$$2x_2 \geq V_1^{\min} \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (3)$$

Resultado:

$$x_1^+ = 1/3$$

$$x_2^+ = 2/3$$

$$V_1^+ = 1.\hat{3}$$

$$\text{PL-J2: } \max V_2^{\min} \quad (0')$$

s.a:

$$2y_1 + y_2 \geq V_2^{\min} \quad (1')$$

$$y_1 + 4y_2 \geq V_2^{\min} \quad (2')$$

$$y_1 + y_2 = 1 \quad (3')$$

Resultado:

$$y_1^+ = 3/4$$

$$y_2^+ = 1/4$$

$$V_2^+ = 1.75$$

Estrategia mixta prudencial: Holmes se asegura la ganancia $V_1^+ = 1.\hat{3}$ · Watson se asegura la ganancia $V_2^+ = 1.75$



Ejemplo 14. Resolución · Estrategia mixta contrapprudencial

Ejemplo 14 · Un acuerdo en el 221B de Baker Street · H y W mixta contrapprudencial:

Estrategias J1:

e_1 : Apostar por ir al teatro

e_2 : Apostar por ir a la ópera

Estrategias J2:

s_1 : Apostar por ir al teatro

s_2 : Apostar por ir a la ópera

Tabla-14.1: Tabla de utilidades de Holmes y Watson (·): Puntuación sobre resultados de las acciones en “Un acuerdo en el 221B de Baker Street”.

J1 J2: $a_{ij} (b_{ij})$	s_1	s_2	Max
e_1	4 (2)	0 (1)	(2)
e_2	0 (1)	2 (4)	(4)
Max	4	2	

PL-J1: $\min V_2^{\max}$ (0)

s.a:

$2x_1 + x_2 \leq V_2^{\max}$ (1)

$x_1 + 4x_2 \leq V_2^{\max}$ (2)

$x_1 + x_2 = 1$ (3)

Resultado:

$x_1^- = 3/4$

$x_2^- = 1/4$

$0.5 \leq V_1^- \leq 3$

J2 $\rightarrow \bar{y}^+ \Rightarrow V_1^- = 2.375$

PL-J2: $\min V_1^{\max}$ (0')

s.a:

$4y_1 \leq V_1^{\max}$ (1')

$2y_2 \leq V_1^{\max}$ (2')

$y_1 + y_2 = 1$ (3')

Resultado:

$y_1^- = 1/3$

$y_2^- = 2/3$

$1.\bar{3} \leq V_2^- \leq 3$

J1 $\rightarrow \bar{x}^+ \Rightarrow V_2^- = 2.\hat{4}$

Estrategia mixta contrapprudencial: Ganancia Holmes $V_1^- \in [0.5, 3]$ · Ganancia Watson $V_2^- \in [1.\bar{3}, 3]$.



Ejemplo 14. Resolución · Estrategia mixta con equiprobabilidad

Ejemplo 14 · Un acuerdo en el 221B de Baker Street · H y W mixta con equiprobabilidad:

Estrategias J1 / J2:

e_1, s_1 : Apostar por ir al teatro

e_2, s_2 : Apostar por ir a la ópera

Tabla-14.1: Tabla de utilidades de Holmes y Watson (·): Puntuación sobre resultados de las acciones en “Un acuerdo en el 221B de Baker Street”.

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s_1	s_2
e_1	4 (2)	0 (1)
e_2	0 (1)	2 (4)

$$\text{Dados: } \left\{ \begin{array}{l} A, B \quad A = (a_{i,j})_{m \times n} : \text{matriz de pagos de J1} \cdot B = (b_{i,j})_{m \times n} : \text{matriz de pagos de J2} \\ \vec{x}, \vec{y} \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \text{ vector de estrategia mixta de J1} \cdot \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \text{ vector de estrategia mixta de J2} \\ V_1, V_2 \quad \text{Ganancias de J1 : } V_1(A, \vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_{1 \times m} A_{m \times n} \vec{y}_{n \times 1} \cdot \text{Ganancias de J2 : } V_2(B, \vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_{1 \times m} B_{m \times n} \vec{y}_{n \times 1} \end{array} \right\}$$

Supongamos que Holmes y Watson apuestan con equiprobabilidad por escrito (teatro y ópera al 50%), resulta:

$$\text{Ganancia Holmes: } V_1 = (0.5, 0.5) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 1.5 \quad \text{Ganancia Watson: } V_2 = (0.5, 0.5) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 2$$

Incremento sobre el nivel de certeza: Holmes $\Delta V_1 = 1.5 - 1.3 = 0.16$ · Watson $\Delta V_2 = 2 - 1.75 = 0.25$



Juegos de suma general cooperativos · Hipótesis

Condiciones e hipótesis:

1. Cada jugador (J1 y J2) intentará conseguir su máxima ganancia.
2. En juego de suma general, la máxima ganancia de J1 no supone la máxima pérdida de J2.
3. Ningún oponente racional estará dispuesto a jugar perdiendo más de lo inevitable.
4. Los jugadores J1 y J2 pueden abandonar sus estrategias individualistas (max·min y min·max) con el propósito de conseguir unas ganancias por encima de sus respectivos *niveles de certeza* o por encima de unas ganancias garantizadas para ambos a través de un acuerdo previo (*Status Quo*).
5. Los jugadores colaborarán buscando los puntos de equilibrio del juego.
6. Los jugadores indicarán sus puntos de equilibrio preferidos.
7. Ambos jugadores conocerán el *conjunto posible* de ganancias con cooperación (conjunto de puntos alcanzables si J1 y J2 se ponen de acuerdo). El conjunto posible es acotado, cerrado y convexo.
8. Ambos jugadores conocerán el *conjunto de entente* de ganancias con cooperación, que forma parte de la frontera del *conjunto posible* (frente *Pareto-óptimo*).
9. En el *conjunto de entente* y según el *Status-Quo*, los jugadores buscarán la *solución cooperativa* y repartirán las ganancias mediante pagos laterales o algún mecanismo de arbitraje racional.



Juegos de suma general cooperativos · Pagos laterales y arbitraje

Elementos de la negociación y del arbitraje:

1. Dos jugadores (J1 y J2) y un arbitro (A)
2. Conjunto *Posible* de puntos con ganancias con cooperación $X_{J1,J2}$ (acotado, cerrado y convexo)
3. Conjunto de *Entente* de ganancias con cooperación $\Pi_{J1,J2} \subseteq X_{J1,J2}$ (Frente *Pareto - óptimo*)
4. Mejores posiciones gananciales de J1 (a^*, b) de J2 (a, b^*) y conjunta $(a, b)^*$
5. Situación ganancial referente (por acuerdo o amenaza) de J1 y J2. *Status Quo* $SQ_0 \equiv (V_1^{SQ_0}, V_2^{SQ_0})$

Pagos laterales:

(a) Criterio racional: $\Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow V_1 - V_1^{SQ_0} = V_2 - V_2^{SQ_0}$

(b) Si (J1,J2) acuerdan:
$$\left\{ \begin{array}{l} (a^*, b) \Rightarrow \text{J1 compensa a J2: } V_1 = a^* - c, V_2 = b + c \\ (a, b^*) \Rightarrow \text{J2 compensa a J1: } V_2 = b^* - c, V_1 = a + c \\ (a, b)^* \Rightarrow V_1 + V_2 = a + b \end{array} \right\}$$

Arbitraje de Nash: $\max \Gamma = (V_1 - V_1^{SQ_0})(V_2 - V_2^{SQ_0}) \quad (0)$

s.a:

$$V_1 \geq V_1^{SQ_0} \quad (1)$$

$$V_2 \geq V_2^{SQ_0} \quad (2)$$

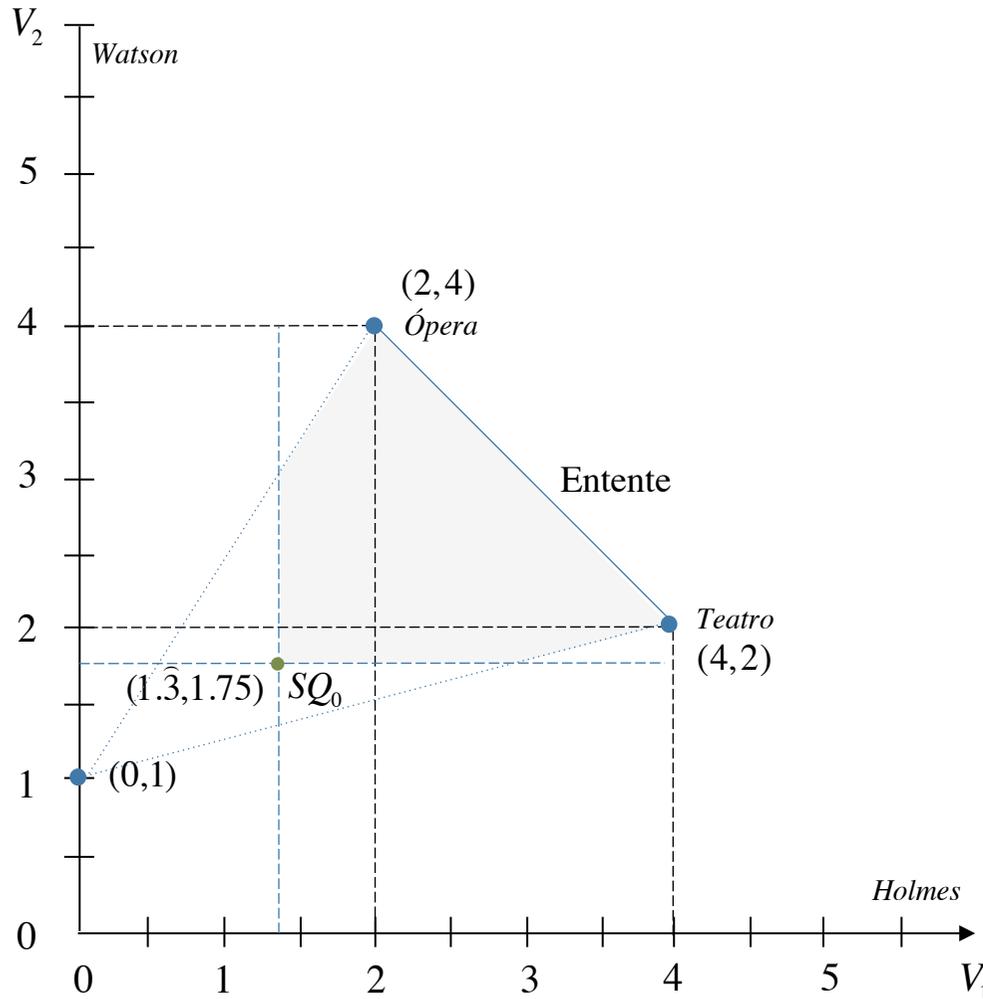
$$(V_1, V_2) \in \Pi_{J1,J2} \quad (3)$$

Resolución: Si $V_2 = f(V_1)$ Hacer: $\frac{\partial \Gamma}{\partial V_1} = 0 \Rightarrow (V_2 - V_2^{SQ_0}) + \frac{\partial V_2}{\partial V_1} (V_1 - V_1^{SQ_0}) = 0$



Ejemplo 14. Resolución · Pagos laterales

Ejemplo 14 · Un acuerdo en el 221B de Baker Street · H y W con pagos laterales:



J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s1: W·Teatro	s2: W·Ópera
e1: H·Teatro	4 (2)	0 (1)
e2: H·Ópera	0 (1)	2 (4)

Posición	Mejor	Peor	Status Quo
Holmes	(4, 2)	(0, 1)	$1.\hat{3}$
Watson	(2, 4)	(0, 1)	1.75

1. Alternativa Teatro, Holmes compensará a Watson:

$$\text{Si (H,W)} \rightarrow (e_1, s_1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta V_1 = 2.\hat{6} \\ \Delta V_2 = 0.25 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta V_{1,2} = 2.91\hat{6}$$

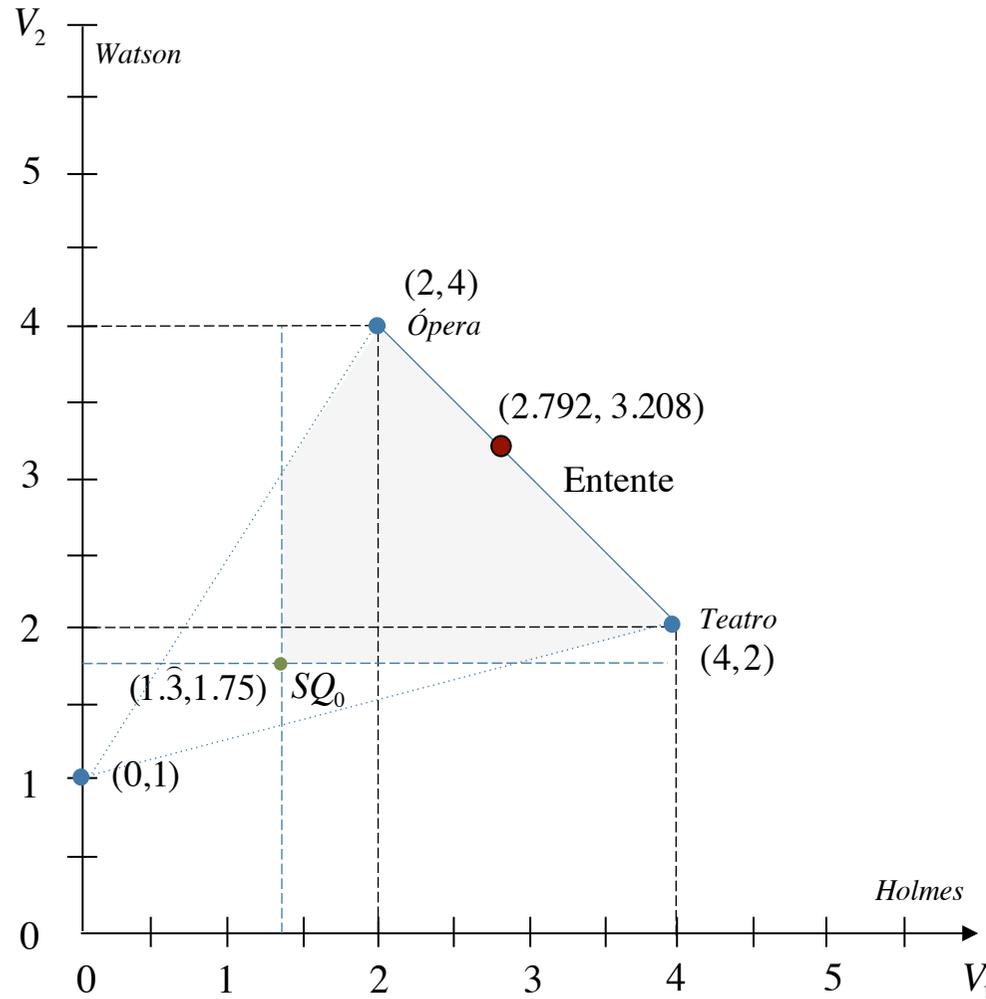
2. Alternativa Ópera, Watson compensará a Holmes:

$$\text{Si (H,W)} \rightarrow (e_2, s_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta V_1 = 0.\hat{6} \\ \Delta V_2 = 2.25 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta V_{1,2} = 2.91\hat{6}$$



Ejemplo 14. Resolución · Arbitraje de NASH

Ejemplo 14 · Un acuerdo en el 221B de Baker Street · H y W arbitraje de Nash:



J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s1: W·Teatro	s2: W·Ópera
e1: H·Teatro	4 (2)	0 (1)
e2: H·Ópera	0 (1)	2 (4)

$$\text{PM-Nash } SQ : (V_1^{SQ_0}, V_2^{SQ_0})$$

$$\max \Gamma = (V_1 - V_1^{SQ_0})(V_2 - V_2^{SQ_0})$$

s.a:

$$V_1 + V_2 = 6$$

$$V_1 \geq V_1^{SQ_0}$$

$$V_2 \geq V_2^{SQ_0}$$

$$\text{Si } SQ_0 \equiv \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.75 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1^* = 2.792 \Rightarrow \Delta V_1 = 1.458 \\ V_2^* = 3.208 \Rightarrow \Delta V_2 = 1.458 \end{cases}$$

Cortesía de Holmes hacia Watson:

- Ir al Teatro el 46.53% de ocasiones
- Ir a la Ópera el 53.47% de ocasiones



Ejemplo 15. Presentación

Ejemplo 15 · Campaña Alianza Vehículos eléctricos 360-EV · Enunciado:

Dos marcas (J1 y J2) de una Alianza automovilística diseñan un plan para aumentar las ventas de una gama de vehículos eléctricos en Europa durante el próximo año. Ambas harán publicidad digital videowall en las estaciones de tren de alta velocidad de 2 ciudades europeas (M, P) durante 360 días. Los cientos de vehículos que J1 y J2 prevén vender durante el año gracias a este medio de difusión y en función de sus estrategias se recogen en la Tabla-15.0

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en M.PA

e_2 : Promoción en P.GL

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en M.PA

s_2 : Promoción en P.GL

J1 J2: a_{ij}, b_{ij}	s_1	s_2
e_1	3, 3	6, 10
e_2	10, 6	5, 5

Tabla-15.0: Tabla de utilidades (J1,J2). Previsión de ventas (cientos de vehículos) de J1 y J2 con la campaña de promoción 360-EV.



Ejemplo 15. Resolución · Estrategia pura prudencial

Ejemplo 15 · Campaña Alianza Vehículos eléctricos 360-EV · J1 y J2 max-min (prudencial):

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en M.PA

e_2 : Promoción en P.GL

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en M.PA

s_2 : Promoción en P.GL

Tabla-15.1: Tabla de utilidades (J1,J2). Previsión de ventas (cientos de vehículos) de J1 y J2 con la campaña de promoción 360-EV (max·min).

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s_1	s_2	Min	
e_1	3 (3)	6 (10)	3	
e_2	10 (6)	5 (5)	5	← max min
Min	(3)	(5)		↑ max min

No hay equilibrio (e_2, s_2) : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si (J1, J2)} \rightarrow (e_1, s_2) \Rightarrow (V_{J1}, V_{J2}) = (6, 10). \text{ Punto de equilibrio ventaja J2} \\ \text{Si (J1, J2)} \rightarrow (e_2, s_1) \Rightarrow (V_{J1}, V_{J2}) = (10, 6). \text{ Punto de equilibrio ventaja J1} \end{array} \right\}$

Si J1 y J2 emplean su estrategia prudencial su nivel de confianza es $(V_{J1}, V_{J2}) = (5, 5)$.

J1 y J2 deben pasar a estrategias mixtas para aumentar su nivel de confianza.

Nota.- Si J1 y J2 se posicionan en un punto de equilibrio pueden vender 1600 vehículos entre ambos.



Ejemplo 15. Resolución · Estrategia pura contrapudencial

Ejemplo 15 · Campaña Alianza Vehículos eléctricos 360-EV · J1 y J2 min-max (contrapudencial):

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en M.PA

e_2 : Promoción en P.GL

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en M.PA

s_2 : Promoción en P.GL

Tabla-15.2: Tabla de utilidades (J1,J2). Previsión de ventas (cientos de vehículos) de J1 y J2 con la campaña de promoción 360-EV (min-max).

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s_1	s_2	Max	
e_1	3 (3)	6 (10)	(10)	
e_2	10 (6)	5 (5)	(6)	← min max
Max	10	6		

↑ min max

Puntos de equilibrio: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } (J1, J2) \rightarrow (e_1, s_2) \Rightarrow (V_{J1}, V_{J2}) = (10, 6) : \text{ventaja J1} \\ \text{Si } (J1, J2) \rightarrow (e_2, s_1) \Rightarrow (V_H, V_W) = (6, 10) : \text{ventaja J2} \end{array} \right\}$

Punto contrapudencial: $(J1, J2) \rightarrow (e_2, s_2) \Rightarrow \text{Ganancias } (V_{J1}, V_{J2}) = (5, 5)$.

Con la estrategia contrapudencial J1 y J2 limitan a 6 la ganancia de su contrario.

J1 y J2 deben pasar a estrategias mixtas para aumentar su utilidad.



Ejemplo 15. Resolución · Estrategia mixta prudencial

Ejemplo 15 · Campaña Alianza Vehículos eléctricos 360-EV · J1 y J2 mixta prudencial:

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en M.PA

e_2 : Promoción en P.GL

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en M.PA

s_2 : Promoción en P.GL

Tabla-15.1: Tabla de utilidades (J1,J2). Previsión de ventas (cientos de vehículos) de J1 y J2 con la campaña de promoción 360-EV (max · min).

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s_1	s_2	Min
e_1	3 (3)	6 (10)	3
e_2	10 (6)	5 (5)	5
Min	(3)	(5)	

$$\text{PL-J1: max } V_1^{\min} \quad (0)$$

s.a:

$$3x_1 + 10x_2 \geq V_1^{\min} \quad (1)$$

$$6x_1 + 5x_2 \geq V_1^{\min} \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (3)$$

Resultado:

$$x_1^+ = 5/8$$

$$x_2^+ = 3/8$$

$$V_1^+ = 5.625$$

$$\text{PL-J2: max } V_2^{\min} \quad (0')$$

s.a:

$$3y_1 + 10y_2 \geq V_2^{\min} \quad (1')$$

$$6y_1 + 5y_2 \geq V_2^{\min} \quad (2')$$

$$y_1 + y_2 = 1 \quad (3')$$

Resultado:

$$y_1^+ = 5/8$$

$$y_2^+ = 3/8$$

$$V_2^+ = 5.625$$

Estrategia mixta prudencial: Niveles de confianza de (J1,J2) : $(V_1^+, V_2^+) = (5.625, 5.625)$



Ejemplo 15. Resolución · Estrategia mixta contrapudencial

Ejemplo 15 · Campaña Alianza Vehículos eléctricos 360-EV · J1 y J2 mixta contrapudencial:

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en M.PA

e_2 : Promoción en P.GL

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en M.PA

s_2 : Promoción en P.GL

Tabla-15.2: Tabla de utilidades (J1,J2). Previsión de ventas (cientos de vehículos) de J1 y J2 con la campaña de promoción 360-EV (min·max).

J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s_1	s_2	Max
e_1	3 (3)	6 (10)	(10)
e_2	10 (6)	5 (5)	(6)
Max	10	6	

PL-J1: $\min V_2^{\max}$ (0)

s.a:

$3x_1 + 6x_2 \leq V_2^{\max}$ (1)

$10x_1 + 5x_2 \leq V_2^{\max}$ (2)

$x_1 + x_2 = 1$ (3)

Resultado:

$x_1^- = 1/8$

$x_2^- = 7/8$

$5.125 \leq V_1^- \leq 9.125$

$J2 \rightarrow \bar{y}^+ \Rightarrow V_1^- = 7.625$

PL-J2: $\min V_1^{\max}$ (0')

s.a:

$3y_1 + 6y_2 \leq V_1^{\max}$ (1')

$10y_1 + 5y_2 \leq V_1^{\max}$ (2')

$y_1 + y_2 = 1$ (3')

Resultado:

$y_1^- = 1/8$

$y_2^- = 7/8$

$5.125 \leq V_2^- \leq 9.125$

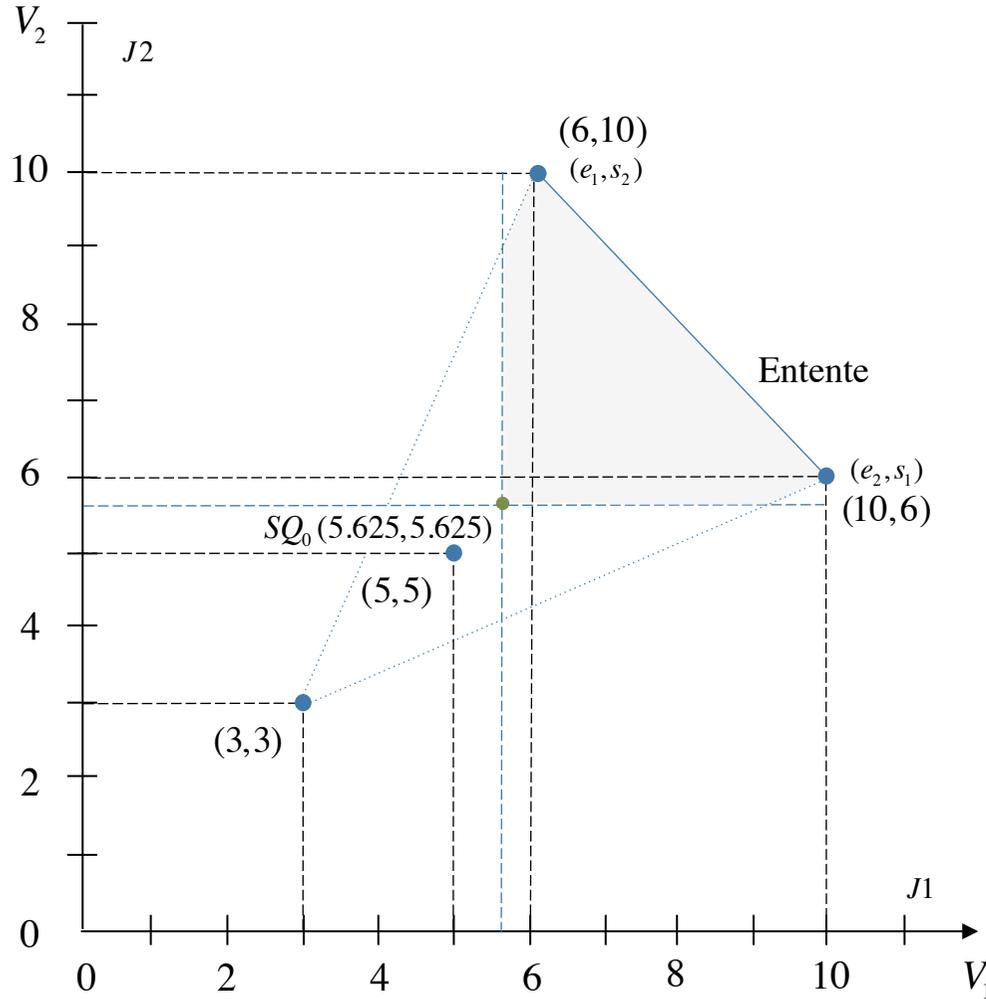
$J1 \rightarrow \bar{x}^+ \Rightarrow V_2^- = 7.625$

Estrategia mixta contrapudencial: Ganancia J1 $V_1^- \in [5.125, 9.125]$ · Ganancia J2 $V_2^- \in [5.125, 9.125]$.



Ejemplo 15. Resolución · Pagos laterales

Ejemplo 15 · Campaña Alianza Vehículos eléctricos 360-EV · J1 y J2 con pagos laterales:



J1 J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s1: J2·M.PA	s2: J2·P.GL
e1: J1·M.PA	3 (3)	6 (10)
e2: J1·P.GL	10 (6)	5 (5)

Posición	Mejor	Peor	Status Quo
J1	(10, 6)	(3, 3)	5.625
J2	(6, 10)	(3, 3)	5.625

1. Alternativa (10, 6), J1 compensará a J2:

$$\text{Si } (J1, J2) \rightarrow (e_2, s_1) \Rightarrow \begin{cases} \Delta V_1 = 4.375 \\ \Delta V_2 = 0.375 \end{cases} \Rightarrow \Delta V_{1,2} = 4.75$$

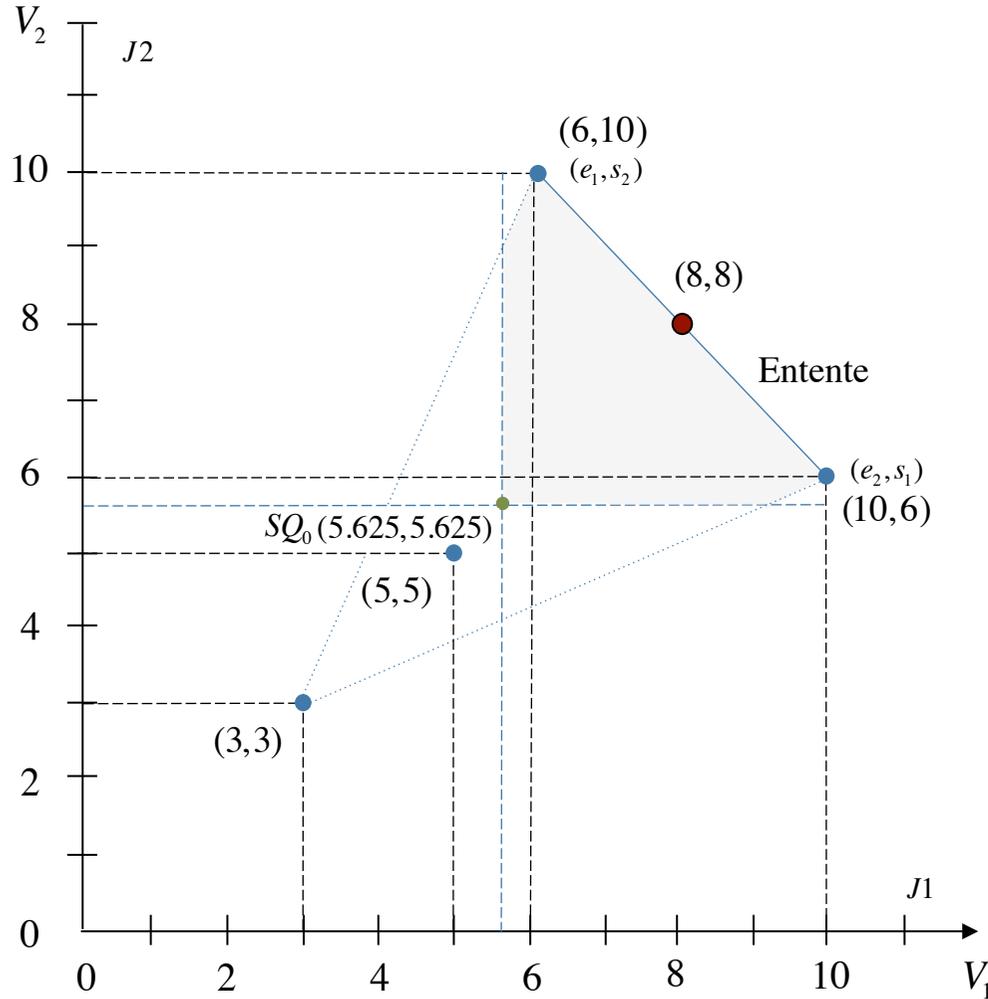
2. Alternativa (6, 10), J2 compensará a J1:

$$\text{Si } (J1, J2) \rightarrow (e_1, s_2) \Rightarrow \begin{cases} \Delta V_1 = 0.375 \\ \Delta V_2 = 4.375 \end{cases} \Rightarrow \Delta V_{1,2} = 4.75$$



Ejemplo 15. Resolución · Arbitraje de NASH

Ejemplo 15 · Campaña Alianza Vehículos eléctricos 360-EV · J1 y J2 arbitraje de Nash:



J1	J2: $a_{ij}(b_{ij})$	s1: J2·M.PA	s2: J2·P.GL
e1: J1·M.PA		3 (3)	6 (10)
e2: J1·P.GL		10 (6)	5 (5)

PM-Nash $SQ : (V_1^{SQ_0}, V_2^{SQ_0})$

$$\max \Gamma = (V_1 - V_1^{SQ_0})(V_2 - V_2^{SQ_0})$$

s.a:

$$V_1 + V_2 = 16$$

$$V_1 \geq V_1^{SQ_0}$$

$$V_2 \geq V_2^{SQ_0}$$

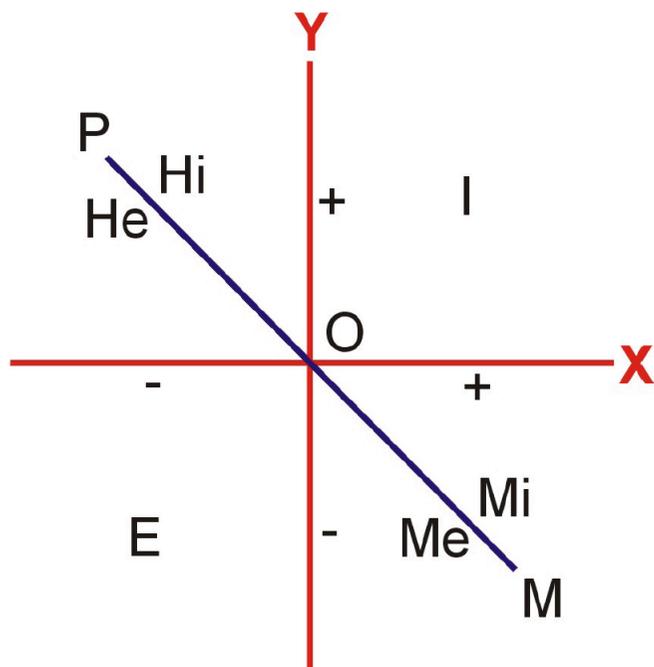
$$\text{Si } SQ_0 \equiv \begin{bmatrix} 5.625 \\ 5.625 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1^* = 8 \Rightarrow \Delta V_1 = 2.375 \\ V_2^* = 8 \Rightarrow \Delta V_2 = 2.375 \end{cases}$$

Promoción conjunta en M.PA y P.GL

Venta conjunta de 1600 EVs



Allegro ma non troppo



LAS LEYES FUNDAMENTALES DE LA ESTUPIDEZ HUMANA

L1: Siempre e inevitablemente cada uno de nosotros subestima el número de individuos estúpidos que circulan por el mundo.

L2: La probabilidad de que una persona determinada sea estúpida es independiente de cualquier otra característica de la misma persona.

L3: Una persona estúpida es una persona que causa un daño a otra persona o grupo de personas sin obtener, al mismo tiempo, un provecho para sí, o incluso obteniendo un perjuicio.

L4: Las personas no estúpidas subestiman siempre el potencial nocivo de las personas estúpidas.

L5: La persona estúpida es el tipo de persona más peligrosa que existe. Corolario: El estúpido es más peligroso que el malvado.

Carlo M. CIPOLLA (1922-2000)

Allegro ma non troppo (1988)

