Notas sobre

Tema 1. Teoría de Juegos y Estrategia Competitiva

PODER DE MERCADO Y ESTRATEGIA

Curso 3º

Grado en Economía

2022-2023

Iñaki Aguirre

Departamento de Análisis Económico

Universidad del País Vasco

ÍNDICE

Introducción

La Teoría de los Juegos no Cooperativos estudia y modela *situaciones de conflicto* entre agentes económicos; es decir, estudia situaciones en las que los beneficios (ganancias, utilidad o pagos) de cada agente económica dependen no sólo de sus propios actos sino también de los actos de las demás agentes.

Supondremos *jugadoras racionales* y, por tanto, cada una de ellas tratará de maximizar su función de beneficios (utilidad o pagos) dadas sus conjeturas o creencias sobre cómo van a actuar las otras jugadoras. El resultado del juego dependerá de las acciones de todas las jugadoras.

Una característica fundamental de los juegos no cooperativos es que *no* se pueden establecer *contratos* entre las jugadoras que se hagan cumplir por terceros. Es decir, no existe una institución externa (p.e. tribunales de justicia) que sea capaz de hacer cumplir los acuerdos. En este contexto, la cooperación entre las jugadoras solo surgirá como equilibrio o propuesta de solución si está en el mejor interés de las jugadoras actuar así.

Para cada juego trataremos de proponer una "solución" que sea una predicción razonable del *comportamiento racional* de las jugadoras (OBJETIVO).

Nos interesa la Tª de los Juegos no Cooperativos porque es de gran utilidad para modelar y comprender los problemas económicos *multipersonales* caracterizados por *interdependencia estratégica*. Como ejemplo consideremos la competencia entre las empresas de una industria. La competencia perfecta y el monopolio puro (en el sentido de no estar amenazado por la entrada) son casos muy especiales y poco realistas. Lo frecuente es encontrarse en la realidad industrias en las que existen pocas empresas (o existen muchas pero un número pequeño de ellas produce un porcentaje muy elevado de la producción total). Cuando hay pocas empresas, la competencia entre ellas estará mediatizada por consideraciones estratégicas: cada empresa toma sus decisiones (precio, producción, publicidad..) teniendo en cuenta o conjeturando el comportamiento de las demás. Por tanto, la competencia en un oligopolio, claramente la podemos ver como un juego no cooperativo donde las empresas son las jugadoras. Así, muchas de las predicciones o propuestas de solución que provienen de la Teoría de Juegos nos serán de gran utilidad para entender el comportamiento de las agentes económicas bajo interacción estratégica

En la sección 1, definiremos las principales nociones de la Teoría de Juegos. Veremos que existen dos formas de representar un juego: la forma extensiva y la forma normal o estratégica. En la sección 2, analizaremos los principales conceptos de solución y los problemas que presentan. Estudiaremos el equilibrio de Nash y los refinamientos. La sección 3 estudia los juegos repetidos y, por último, en la sección 4 se presentan algunas conclusiones.

1.1. **Nociones fundamentales**

Existen dos formas de representar un juego: la forma extensiva y la forma normal o estratégica. Vamos a comenzar analizando los principales elementos de un juego en forma extensiva.

1.1.1. **Juegos en forma extensiva** (dinámicos o secuenciales)

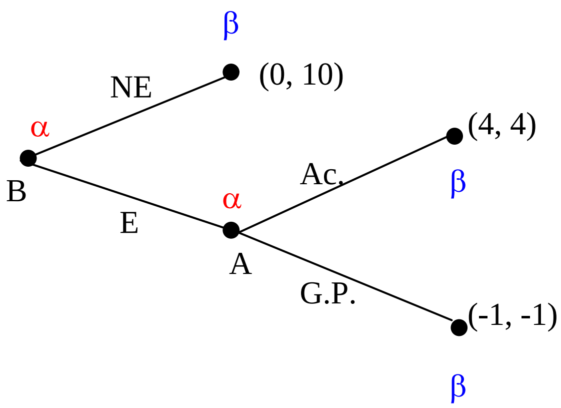
Un juego en forma extensiva especifica:

1) Las jugadoras.
2) El orden del juego.
3) Las elecciones factibles para una jugadora cuando le toca el turno (en cada nodo de decisión).
4) La información que tiene cada jugadora en cada uno de sus turnos de juego (nodos).
5) Los pagos para cada jugadora como una función de los movimientos seleccionados.
6) Distribuciones de probabilidad para movimientos de la naturaleza.

Un juego en forma extensiva se suele describir a través de un *árbol de decisión*. Un árbol de decisión está constituido por ramas y nodos. Hay dos tipos de nodos: nodos de decisión y nodos terminales. Hay que señalar en cada nodo la agente que tiene que tomar la decisión. Cuando alcanzamos un nodo de decisión, la agente de ese nodo tiene su turno y elige en qué dirección ir. Cuando se alcanza un nodo terminal se producen pagos: un vector de pagos en cada nodo terminal que nos dice lo que gana cada jugadora.

EJEMPLO 1: Juego de entrada

Consideremos una industria en la que hay una empresa establecida, A, y un entrante potencial, B. En la primera etapa del juego, el entrante potencial decide si entrar o no en la industria. Si decide no entrar el juego termina y se producen pagos (A obtiene el beneficio de monopolio) y si decide entrar entonces le toca el turno a la empresa establecida, A, que tiene que decidir si acomodarse a la entrada de B (repartirse el mercado) o comenzar una guerra de precios mutuamente perjudicial. En forma extensiva el juego quedaría representado de la siguiente forma:



Jugadoras: B y A.

Acciones: *E* (entrar), *NE* (no entrar), *Ac.* (acomodar), *G.P.* (guerra de precios).

Nodos de decisión: α.

Nodos terminales: β.

(x, y): vector de pagos. x: pago para la jugadora B; y: pago para la jugadora A.

En cada nodo terminal se tienen que especificar los pagos de cada una de las jugadoras (incluso aunque alguna de ellas no haya llegado "físicamente" a jugar).

Supuestos:

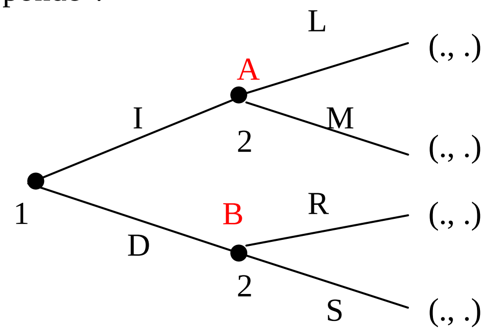
(i) Todas las jugadoras tienen la misma percepción de cómo es el juego.

(ii) Información completa: cada jugadora conoce las características de las demás jugadoras: preferencias y espacios de estrategias.

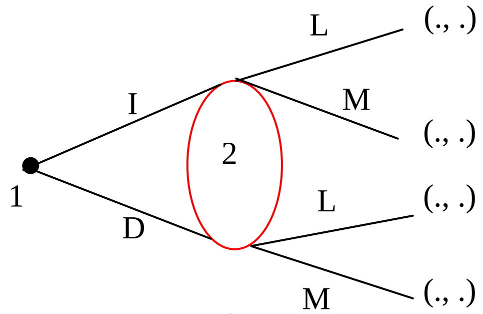
(iii) Memoria perfecta: cada agente recuerda todo lo que ha jugado.

Definición 1: **Conjunto de información**

"Es la información de la que dispone cada jugadora en cada nodo de decisión que le corresponde".



Juego 1

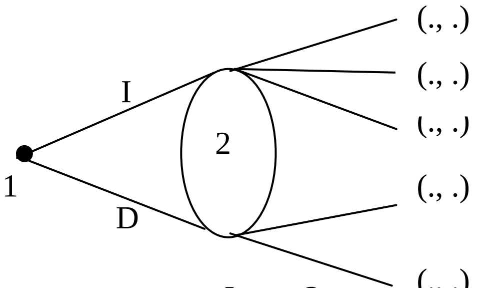


Juego 2

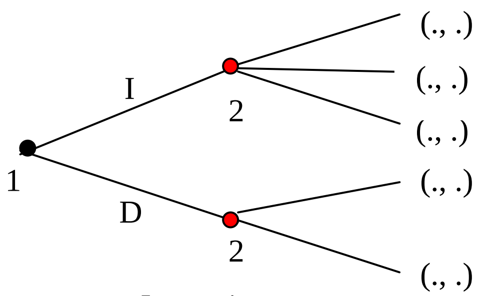
En el juego 1, la jugadora 2 tiene diferente información en cada uno de sus dos nodos. En *A*, si le toca jugar sabe que la jugadora 1 ha jugado *I* y en *B* que ha jugado *D*. Decimos que estos conjuntos de información constan de un único nodo de decisión. En el juego 2, la jugadora 2 tiene la misma información en sus dos nodos de decisión. Es decir, el conjunto de información constaría de dos nodos de decisión.

Un juego en el que existen conjuntos de información de más de un nodo se dice que es un juego de información imperfecta: alguna de las jugadoras no observa los movimientos de la otra o de las otras jugadoras. Abusando del lenguaje se suele llamar conjunto de información al conjunto de nodos en los que una misma jugadora tiene que jugar en ausencia de información sobre el nodo concreto en el que se encuentra.

El hecho de que todas las jugadoras sepan el tipo de juego que están jugando y el supuesto de memoria perfecta limitan las situaciones en las que podemos tener conjuntos de información con más de un nodo.

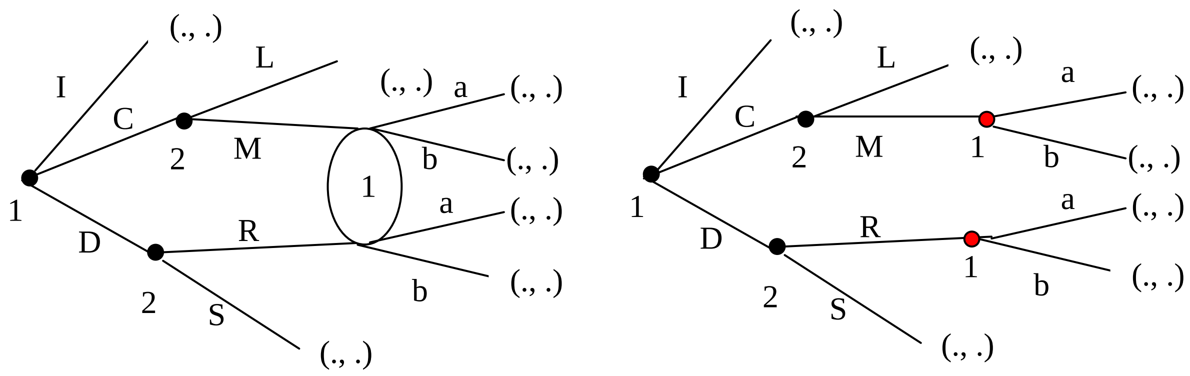


Juego 3



Juego 4

El juego 3 está mal representado ya que no sería un juego de información imperfecta. Si la jugadora 2 conoce el juego, cuando le toque jugar y se enfrente a tres alternativas automáticamente deducirá que se encuentra en el nodo superior. Es decir, el juego en forma extensiva debería ser como el del juego 4. Por tanto, *si un conjunto de información consta de* *dos o más nodos de decisión, en cada uno de ellos el número de opciones (acciones o movimientos) debe ser el mismo*.



Juego 5 Juego 6

El supuesto de memoria perfecta impide situaciones como la del juego 5. La jugadora 1 cuando le toca jugar en su segundo nodo de decisión "recuerda" perfectamente lo que hizo en el primero. La forma extensiva debería ser como la del juego 6.

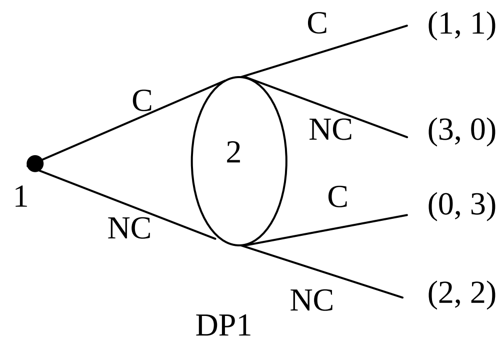
Definición 2: **Subjuego**

"Lo que queda por jugar a partir de un nodo de decisión, siempre y cuando lo que quede por jugar no forme parte de un conjunto de información de dos o más nodos. Al formar subjuegos se miran partes del árbol de decisión que puedan construirse sin romper ningún conjunto de información. Un subjuego comienza en un conjunto de información de un único nodo de decisión y todos los nodos de decisión de un mismo conjunto de información deben pertenecer al mismo subjuego."

EJEMPLO 2: El dilema de la prisionera

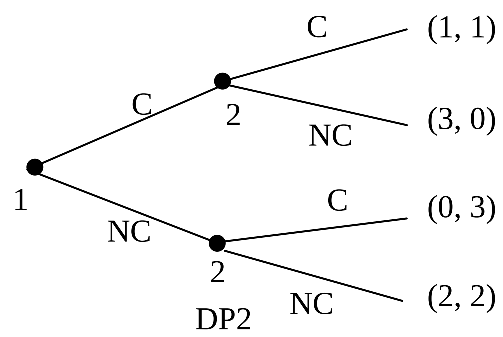
Dos individuas, 1 y 2, son detenidas como sospechosas de haber cometido conjuntamente un delito. La policía les interroga en habitaciones separadas de forma que no hay comunicación entre ellas. Cada una tiene la posibilidad de confesarse culpable (*C*) o no confesar (*NC*). Si sólo confiesa una ésta queda en libertad y las autoridades culpan a la otra condenándole a 6 meses. Si ambas niegan su participación son condenadas a 1 mes cada una y si ambas confiesan son condenadas a 3 meses cada una.

- **Caso simultáneo**: cada individua toma su decisión sin saber lo que ha decidido la otra.



Hay un conjunto de información con dos nodos de decisión. Es un juego de información imperfecta. Sólo hay un subjuego que coincide con el propio juego.

- **Caso secuencial**: la segunda observa la elección tomada por la primera (y ésta lo sabe).



El juego DP2 es un juego de información perfecta y tiene tres subjuegos. “En los juegos de información perfecta hay tantos subjuegos como nodos de decisión”.

Definición 3: **Estrategia**

“Una estrategia de una jugadora es una descripción completa de *lo que haría* en caso de ser llamado a jugar en cada uno de sus nodos de decisión. Hay que especificarlo incluso en aquellos nodos que no fueran alcanzables para ella dado el comportamiento actual de la otra o de las otras jugadoras. Es un *plan de comportamiento* o *plan de conducta*”. (Ejemplos: entrenador de baloncesto, demanda del consumidor, oferta de la empresa competitiva…). Es una función en la que cada jugadora asigna una acción a cada nodo que le corresponde. Una estrategia de una jugadora tiene tantas componentes como conjuntos de información tenga la jugadora.

Definición 4: **Acción**

“Es una elección (decisión o movimiento) en un nodo de decisión”

Las acciones son “físicas” y las estrategias son “conjeturales”.

Definición 5: **Jugada o combinación de estrategias**

“Es una especificación de una estrategia para cada una de las jugadoras”. El resultado (vector de pagos) de una jugada debe quedar inequívocamente determinado.

EJEMPLO 1: Juego de entrada

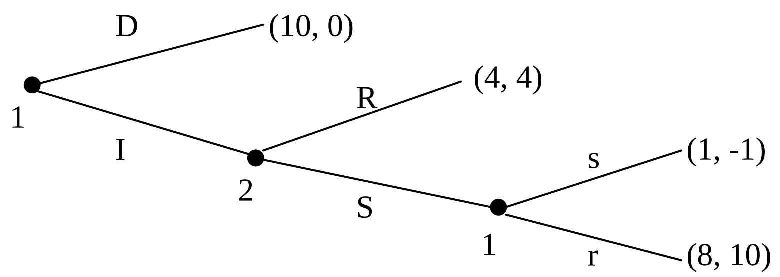
Es un juego de información perfecta y dos subjuegos. Cada jugadora tiene dos estrategias: $S_B = \{NE, E\}$ y $S_A = \{Ac., G.P.\}$. Combinaciones de estrategias: (*NE*, *Ac*.), (*NE*, *G.P.*), (*E*, *Ac*.) y (*E*, *G.P*.).

EJEMPLO 2: Dilema de la prisionera

DP1: Es un juego de información imperfecta y tiene un subjuego. Cada jugadora tiene dos estrategias: $S_1 = \{C, NC\}$ y $S_2 = \{C, NC\}$. Combinaciones de estrategias: (*C*, *C*), (*C*, *NC*), (*NC*, *C*) y (*NC*, *NC*).

DP2: Es un juego de información perfecta y tiene tres subjuegos. La jugadora A tiene dos estrategias $S_1 = \{C, NC\}$ pero la jugadora B tiene cuatro $S_2 = \{CC, CNC, NCC, NCNC\}$. Combinaciones de estrategias: (*C*, *CC*), (*C*, *CNC*), (*C*, *NCC*), (*C*, *NCNC*), (*NC*, *CC*), (*NC*,*CNC*), (*NC*, *NCC*) y (*NC*, *NCNC*).

EJEMPLO 3



La jugadora 1 tiene en su primer nodo de decisión dos posibles acciones, *D* e *I*, y en el segundo nodo también dos acciones: *s* y *r*. $S_1 = \{Ds, Dr, Is, Ir\}$ y $S_2 = \{R, S\}$.

1.1.2. **Juegos en forma normal o estratégica** (simultáneos o estáticos)

Un juego en forma normal se describe por:

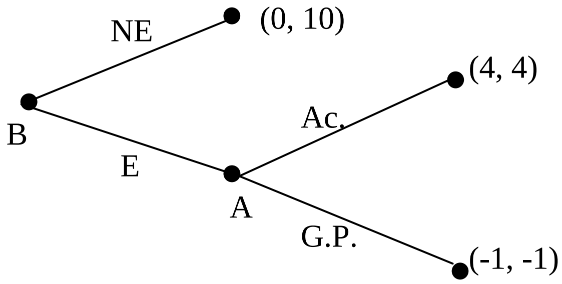
1) Las jugadoras.

2) El conjunto (o espacio) de estrategias de cada jugadora.

3) Una función de pagos que asigna a cada combinación de estrategias un vector de pagos.

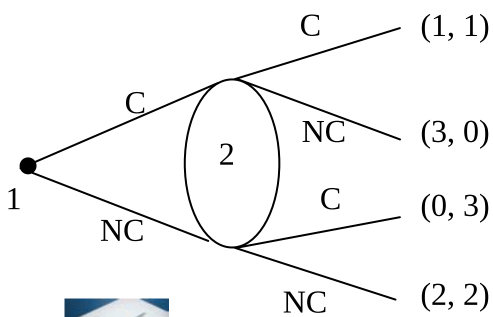
El elemento clave de esta forma de representar un juego es la descripción de los pagos del juego en función de las estrategias de las jugadoras, sin explicitar las acciones que se van tomando a lo largo del juego. La representación gráfica, para dos jugadoras, es una matriz (binaria) de pagos que tiene como entradas las posibles estrategias de las dos jugadoras.

EJEMPLO 1: Juego de entrada

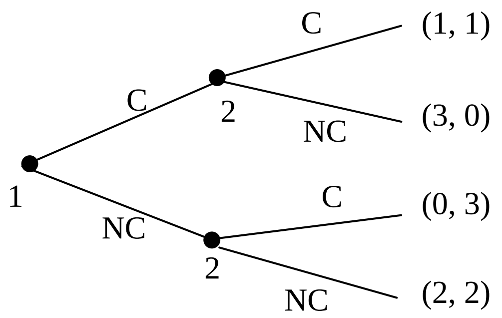


		A	
		Ac.	G.P.
B	NE	(0, 10)	(0, 10)
	E	(4, 4)	(-1, -1)

EJEMPLO 2: Dilema de la prisionera

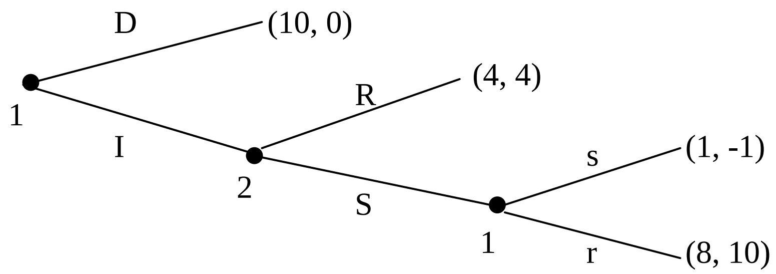


		2	
		C	NC
1	C	(1, 1)	(3, 0)
	NC	(0, 3)	(2, 2)



		2			
		CC	CNC	NCC	NCNC
1	C	(1, 1)	(1, 1)	(3, 0)	(3, 0)
	NC	(0, 3)	(2, 2)	(0, 3)	(2, 2)

EJEMPLO 3



		2	
		R	S
1	Ds	(10, 0)	(10, 0)
	Dr	(10, 0)	(10, 0)
	Is	(4, 4)	(1, -1)
	Ir	(4, 4)	(8, 10)

Relación entre juegos en forma normal y juegos en forma extensiva

a) Para todo juego en forma extensiva tenemos de forma inequívoca un juego en forma normal que le corresponde. Esto es debido a que el juego en forma normal se describe en función de las estrategias de las jugadoras.

b) (Problema) Juegos diferentes en forma extensiva pueden tener la misma forma normal. (Ejemplo: dilema de la prisionera, DP1, cambiando el orden del juego).

1.2. **Conceptos (criterios) de solución de juegos no cooperativos**

El objetivo es intentar predecir cómo se van a comportar las jugadoras cuando se enfrentan a un determinado juego. NOTA: “Una propuesta de solución no es un vector de pagos sino una combinación de estrategias, una para cada jugadora, que conducirá a un vector de pagos. Nos interesa predecir comportamientos, no ganancias.

Notación

i: Jugadora representativa, $i = 1,\ldots, n$

S_i: conjunto o espacio de estrategias de la jugadora *i*.

$s_i \in S_i$: estrategia de la jugadora *i*.

$s_{-i} \in S_{-i}$: estrategia o combinación de estrategias de la otra jugadora (o las otras jugadoras).

$\Pi_i(s_i, s_{-i})$: beneficio o ganancia de la agente i correspondiente a la combinación de estrategias $s \equiv (s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n) \equiv (s_i, s_{-i})$.

1.2.1. **Criterio de dominación**

Definición 6: **Estrategia dominante**

“Una estrategia es estrictamente dominante para una jugadora si lleva a unos resultados estrictamente mejores (mayores ganancias) que el resto de sus estrategias ante cualquier combinación de estrategias de las demás jugadoras”.

“Si $\Pi_i(s_i^D, s_{-i}) > \Pi_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^D; \forall s_{-i} \in S_{-i}$, entonces s_i^D es una estrategia (estrictamente) dominante de la jugadora *i*”.

EJEMPLO 2: Dilema de la prisionera

En el juego DP1 “confesar”, *C*, es una estrategia dominante para cada jugadora. Independientemente de lo que haga la otra jugadora lo mejor que puede hacer cada una es confesar.

La presencia de estrategias dominantes conduce a una solución del juego. Cada jugadora utilizará su estrategia dominante. La propuesta de solución para el juego DP1 será la combinación de estrategias (*C*, *C*).

Definición 7: **Dominación (estricta)**

“Decimos que una estrategia domina estrictamente a otra para una jugadora cuando conduce a mejores resultados cualesquiera que sean las estrategias seguidas por las demás jugadoras”.

“Si $\Pi_i(s_i^d, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{dd}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$, entonces s_i^d domina estrictamente a s_i^{dd} ”.

Definición 7’: **Estrategia (estrictamente) dominada**

“Decimos que una estrategia está estrictamente dominada para una jugadora si existe otra estrategia que conduce a mejores resultados cualesquiera que sean las estrategias seguidas por las demás jugadoras”.

“ s_i^{dd} está estrictamente dominada si $\exists s_i^d$ tal que $\Pi_i(s_i^d, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{dd}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ ”.

El criterio de dominación consiste en la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

EJEMPLO 4

1 \ 2	t_1	t_2	t_3
s_1	(4, 3)	(2, 7)	(0, 4)
s_2	(5, 5)	(5, -1)	(-4, -2)

En este juego no existen estrategias dominantes. Sin embargo, la presencia de estrategias dominadas nos va a permitir predecir un resultado. Vamos a aplicar el criterio de dominación. Como la estrategia t_3 es una estrategia estrictamente dominada por t_2 la jugadora 1 puede conjeturar (predecir) que la jugadora 2 nunca utilizará esa estrategia. Dada esta conjetura, que supone racionalidad de la jugadora 2, para la jugadora 1 s_2 es mejor que s_1. La estrategia s_1 sólo sería utilizada ante la posibilidad de que la jugadora 2 juegue t_3. Como la jugadora 1 piensa que la jugadora 2 es racional asignará una probabilidad nula a que la jugadora 2 juegue t_3. En ese caso, la jugadora 1 debería jugar s_2 y si la jugadora 2 es racional lo mejor que podría hacer es jugar t_1. La utilización del criterio de dominación sucesiva (eliminando las estrategias dominadas y computando los juegos reducidos) permite resolver el juego.

EJEMPLO 5

1 \ 2	t_1	t_2
s_1	(10, 0)	(5, 2)
s_2	(10, 1)	(2, 0)

En este juego no existen estrategias dominantes ni estrategias dominadas (estrictamente).

Definición 8: **Dominación débil**

"Una estrategia domina débilmente a otra para una jugadora si lleva a resultados por lo menos tan buenos como la segunda cualesquiera que sean las estrategias seguidas por las demás jugadoras, y estrictamente mejores que la segunda para alguna combinación de estrategias de las demás".

"Si $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) \geq \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ y $\exists s_{-i}$ tal que $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i})$, entonces s_i^{db} domina débilmente a s_i^{ddb}".

Definición 8': **Estrategia débilmente dominada**

"Una estrategia está débilmente dominada para una jugadora si existe otra estrategia que lleva a resultados por lo menos tan buenos como la primera cualesquiera que sean las estrategias seguidas por las demás jugadoras, y estrictamente mejores que la primera para alguna combinación de estrategias de las demás".

"s_i^{ddb} es una estrategia débilmente dominada si existe otra estrategia s_i^{db} tal que $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) \geq \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ y $\exists s_{-i}$ tal que $\Pi_i(s_i^{db}, s_{-i}) > \Pi_i(s_i^{ddb}, s_{-i})$ ".

En el Ejemplo 5, s_1 domina débilmente a s_2. La jugadora 2 podría conjeturar que la jugadora 1 jugará s_1 y ante esta conjetura lo mejor que podría hacer sería jugar t_2. Siguiendo el criterio de dominación débil nuestra propuesta de solución sería (s_1, t_2).

Sin embargo, la aplicación sucesiva del criterio de dominación débil puede llevar a resultados problemáticos como ocurre en el Ejemplo 6, o a no proponer ninguna solución como ocurre en el Ejemplo 7 (al no existir ni estrategias dominantes, ni dominadas, ni débilmente dominadas).

EJEMPLO 6

		t_1	t_2	t_3
1	s_1	(10, 0)	(5, 1)	(4, -200)
	s_2	(10, 100)	(5, 0)	(0, -100)

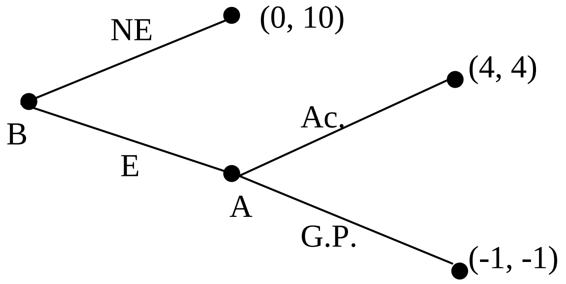
EJEMPLO 7

			2	
		t_1	t_2	t_3
1	s_1	(4, 10)	(3, 0)	(1, 6)
	s_2	(0, 0)	(2, 10)	(10, 6)

1.2.2. **Criterio de inducción retroactiva**

Vamos a utilizar el criterio de dominación para analizar la forma extensiva. Consideremos el Ejemplo 1.

EJEMPLO 1: Juego de entrada



		A	
		Ac.	G.P.
B	NE	(0, 10)	(0, 10)
	E	(4, 4)	(-1, -1)

En el juego en forma normal, la jugadora A tiene una estrategia débilmente dominada: *G.P.*. La jugadora B podría conjeturar esto y jugar *E*. Sin embargo, la jugadora B también podría haber elegido *NE* para asegurarse el pago ante la posibilidad de que A jugara *G.P.*.

En el juego en forma extensiva, la solución es más natural. Se aplica la inducción hacia atrás o inducción retroactiva. La jugadora B como juega primero puede conjeturar, correctamente, que si juega *E* seguro que la jugadora A elegirá *Ac.*. La jugadora B al jugar antes que A puede anticipar el comportamiento de A. En la forma extensiva tenemos más información ya que cuando A juega conoce el movimiento de B. El criterio de inducción retroactiva consiste en aplicar el criterio de dominación sucesiva de forma retroactiva comenzando desde el último(s) subjuego(s). En el Ejemplo 1, en forma extensiva, el criterio de inducción retroactiva propone como solución (*E*, *Ac.*).

Resultado: *Si el juego es de información perfecta y sin empates, el criterio de inducción retroactiva nos llevará a una única propuesta de solución.*

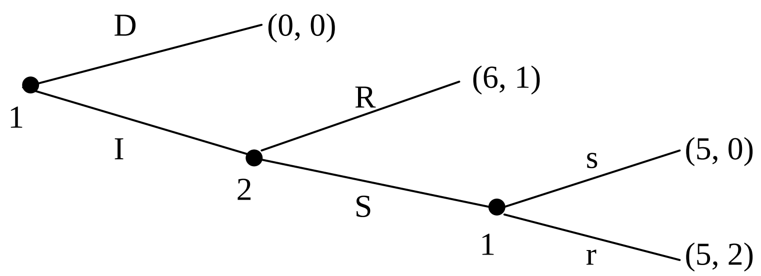
Problemas

(i) *Posibilidad de empates*.

(ii) *Información imperfecta*. Existencia de conjuntos de información con más de un nodo.

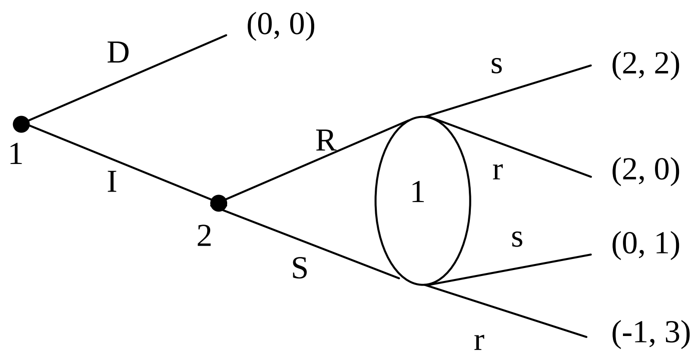
(iii) El éxito de la inducción hacia atrás reside en que todas las conjeturas sobre la racionalidad de las agentes se verifiquen exactamente con independencia de lo largo que sea el camino hacia atrás. (Requiere *racionalidad ilimitada*)

EJEMPLO 8



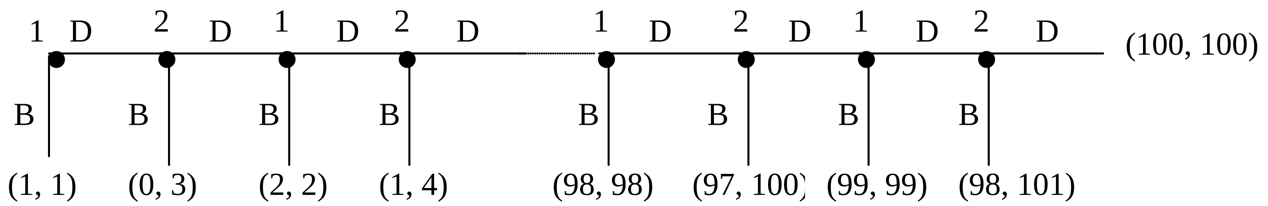
La inducción retroactiva no nos lleva a ninguna propuesta de solución ya que en el último subjuego la jugadora 1 está indiferente entre *s* y *r*. En el subjuego anterior, la jugadora 2 no tendría una acción dominada (ya que no sería capaz de predecir el comportamiento de la jugadora 1).

EJEMPLO 9



No podemos aplicar el criterio de inducción retroactiva.

EJEMPLO 10: El ciempiés de Rosenthal (1981)



En el resultado de inducción retroactiva los pagos son (1, 1). ¿Es posible otra racionalidad?

1.2.3. **Equilibrio de Nash**

La jugadora *i*, *i* = 1,…, *n*, viene caracterizada por:

(i) Su espacio estratégico: S_i.

(ii) Una función de beneficios o función de ganancias, $\Pi_i(s_i, s_{-i})$ donde $s_i \in S_i$ y $s_{-i} \in S_{-i}$.

Cada jugadora tratará de maximizar su función de beneficios (utilidad o ganancias) eligiendo una estrategia apropiada con conocimiento de los espacios estratégicos y las funciones de beneficios de las otras jugadoras aunque sin conocer la estrategia concreta utilizada por las rivales. Por tanto, cada jugadora debe conjeturar la estrategia utilizada por las rivales.

Definición 9: **Equilibrio de Nash**

"Una combinación de estrategias $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ constituye un equilibrio de Nash si el resultado para cada una de las jugadoras es mejor o igual que el resultado que obtendría, permaneciendo constante la jugada de las demás, jugando otra estrategia. Es decir, $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash si: $\Pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*)$ $\forall s_i \in S_i, \forall i, i = 1, \ldots, n$."

En una situación de equilibrio se tienen que cumplir dos condiciones:

(i) Las *conjeturas* de las jugadoras sobre cómo van a jugar las rivales deben ser *correctas*.

(ii) Ninguna jugadora tiene incentivos a cambiar su estrategia dadas las estrategias de las demás jugadoras. Éste es un elemento de *racionalidad individual*: dado lo que hacen las demás hacerlo lo mejor posible. O lo que es lo mismo, ninguna jugadora aumenta sus beneficios (utilidad o pagos) mediante una *desviación unilateral*.

Ser equilibrio de Nash es una *condición necesaria* o requisito mínimo para que cualquier propuesta de solución de un juego sea una predicción razonable del comportamiento racional de las jugadoras. Sin embargo, como ya veremos no es una condición suficiente. Es decir, no basta con que una combinación de estrategias sea equilibrio de Nash para que sea nuestra predicción de la solución de un juego.

Definición 10: **Equilibrio de Nash**

"Una combinación de estrategias $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ constituye un equilibrio de Nash si la estrategia de cada jugadora es la mejor respuesta (o al menos una de ellas) ante las estrategias seguidas por las otras jugadoras." Es decir, $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash si:

$$s_i^* \in MR_i(s_{-i}^*) \forall i, i = 1, \ldots, n$$

donde $MR_i(s_{-i}^*) = \left\{ s_i^{'} \in S_i : \Pi_i(s_i^{'}, s_{-i}^*) \geq \Pi_i(s_i, s_{-i}^*),\ \forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^{'} \right\}$

Una forma sencilla de calcular los equilibrios de Nash consiste en construir los conjuntos de mejores respuestas de cada jugadora ante las estrategias (o combinaciones de estrategias) de la otra (o las otras jugadoras) y buscar aquellas combinaciones de estrategias que sean mutuamente mejores respuestas.

EJEMPLO 11

		2: h	2: i	2: j
1	a	(5, 3)	(5, 11)	(20, 5)
1	b	(9, 11)	(2, 8)	(15, 6)
1	c	(3, 10)	(10, 2)	(0, 5)

s_1	MR_2	s_2	MR_1
a	i	h	b
b	h	i	c
c	h	j	a

La combinación de estrategias (*b*, *h*) constituye el único equilibrio de Nash del juego.

EJEMPLO 7

		2: t_1	2: t_2	2: t_3
1	s_1	(4, 10)	(3, 0)	(1, 6)
1	s_2	(0, 0)	(2, 10)	(10, 6)

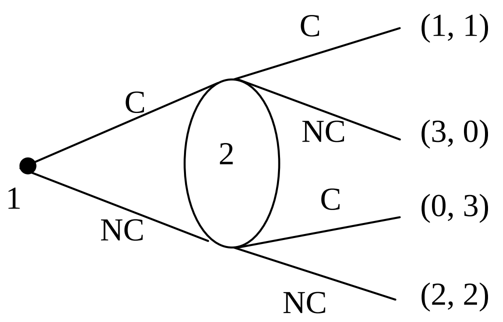
Nótese que para este juego el criterio de dominación no nos proponía ninguna solución. Sin embargo, la combinación de estrategias (s_1, t_1) constituye el único equilibrio de Nash del juego.

1.3. **Problemas y refinamientos del equilibrio de Nash**

1.3.1. **Posibilidad de ineficiencia**

Es habitual encontrar juegos en los que el equilibrio de Nash no es óptimo de Pareto (eficiente).

EJEMPLO 2: Dilema de la prisionera



1 \ 2	C	NC
C	(1, 1)	(3, 0)
NC	(0, 3)	(2, 2)

(C, C) es un equilibrio de Nash en estrategias dominantes. Sin embargo, encontramos otra combinación de estrategias (NC, NC) en la que ambas jugadoras obtienen mayores ganancias.

1.3.2. **Inexistencia de equilibrio de Nash**

EJEMPLO 12

1 \ 2	t_1	t_2
s_1	($\underline{1}$, 0)	(0, $\underline{1}$)
s_2	(0, $\underline{1}$)	($\underline{1}$, 0)

En este juego no existe equilibrio de Nash en estrategias puras. Sin embargo, permitiendo la utilización de estrategias mixtas (distribuciones de probabilidad sobre el espacio de estrategias puras de una jugadora) se obtiene el resultado de que "siempre existe equilibrio de Nash en estrategias mixtas (juegos finitos)".

1.3.3. **Multiplicidad de equilibrios de Nash**

Vamos a distinguir dos tipos de juegos.

1.3.3.1. ***Sin posibilidad de refinamiento o selección***

EJEMPLO 13: La batalla de los sexos

Una pareja de novios tiene que elegir entre ir al cine o al teatro. El novio prefiere el cine al teatro, pero prefiere ir al teatro acompañado que ir solo al cine. Similarmente (pero al contrario) para la novia. El juego en forma normal es:

		Na	
		C	T
No	C	($\underline{3}$, $\underline{2}$)	(1, 1)
	T	(1, 1)	($\underline{2}$, $\underline{3}$)

En este juego hay dos equilibrios de Nash: (C, C) y (T, T). Existe un problema de *coordinación pura*.

1.3.3.2. ***Con posibilidad de refinamiento o selección***

a) *Criterio de eficiencia*

Elegir el equilibrio de Nash que proporcione mayores pagos a las jugadoras. No es en general un buen criterio de selección.

b) *Criterio de dominación débil*

El criterio consiste en eliminar aquellos equilibrios de Nash basados en estrategias débilmente dominadas. Aunque como concepto de solución no es bueno, nos permite seleccionar entre los equilibrios de Nash.

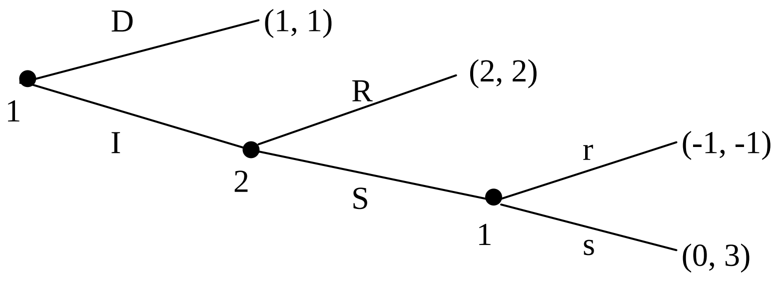
EJEMPLO 14

		2: D	2: I
1	D	($\underline{1}$, $\underline{1}$)	($\underline{0}$, 0)
1	I	(0, $\underline{0}$)	($\underline{0}$, $\underline{0}$)

Equilibrios de Nash: (*D*, *D*) y (*I*, *I*). Jugar *I* es una estrategia débilmente dominada para cada jugadora. Jugando *D* cada jugadora se garantiza un pago por lo menos tan alto como jugando *I*. Tenderíamos a rechazar (*I*, *I*) por estar basado en estrategias débilmente dominadas. Por tanto, proponemos como solución la combinación de estrategias (*D*, *D*).

c) *Criterio de inducción retroactiva y equilibrio perfecto en subjuegos*

EJEMPLO 15



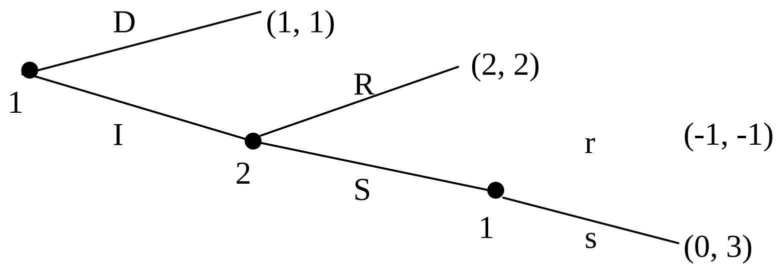
s_1	MR_2	s_2	MR_1
Dr	R, S	R	Ir, Is
Ds	R, S	S	Dr, Ds
Ir	R		
Is	S		

En este juego hay tres equilibrios de Nash: (*Dr*, *S*), (*Ds*, *S*) y (*Ir*, *R*). Comencemos mirando a la solución eficiente: (*Ir*, *R*). Este equilibrio de Nash presenta un problema: en su segundo nodo de decisión la jugadora 1, aunque no es alcanzable, está anticipando (amenazando) que jugaría *r*. Amenazando con *r* trata de conseguir que la jugadora 2 juegue *R* y así obtener más pago. Pero este equilibrio está basado en una amenaza no creíble: aunque, dada la estrategia de la jugadora 2, el segundo nodo de decisión de la jugadora 1 no es alcanzable, si lo fuera la jugadora 1 nunca elegiría *r* ya que es una acción dominada (amenaza no creíble) por *s* en el último subjuego. El refinamiento que vamos a utilizar consiste en la eliminación de aquellos equilibrios basados en amenazas no creíbles (es decir, acciones dominadas dentro de los subjuegos). De la utilización conjunta de la noción de equilibrio de Nash y del criterio de inducción retroactiva surge la noción de:

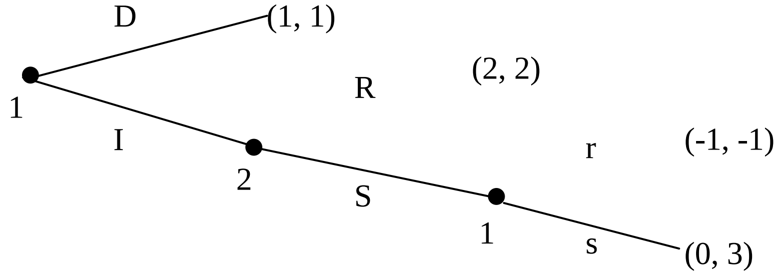
Definición 11: **Equilibrio perfecto en subjuegos**

"Una jugada o combinación de estrategias $s^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_n^*)$, que sea equilibrio de Nash, constituye un *equilibrio perfecto en subjuegos* si las partes relevantes de las estrategias de equilibrio de cada una de las jugadoras son también de equilibrio para cada uno de los subjuegos.”

En el Ejemplo 15 (*Dr*, *S*) y (*Ir*, *R*) no son equilibrios perfectos en subjuegos. El equilibrio perfecto en subjuegos se obtiene por inducción retroactiva. Comenzamos por el último subjuego. En este subjuego, *r* es una acción dominada; por tanto, no puede formar parte de la estrategia de la jugadora 1 en un equilibrio perfecto en subjuegos, de modo que la eliminamos y computamos el juego reducido



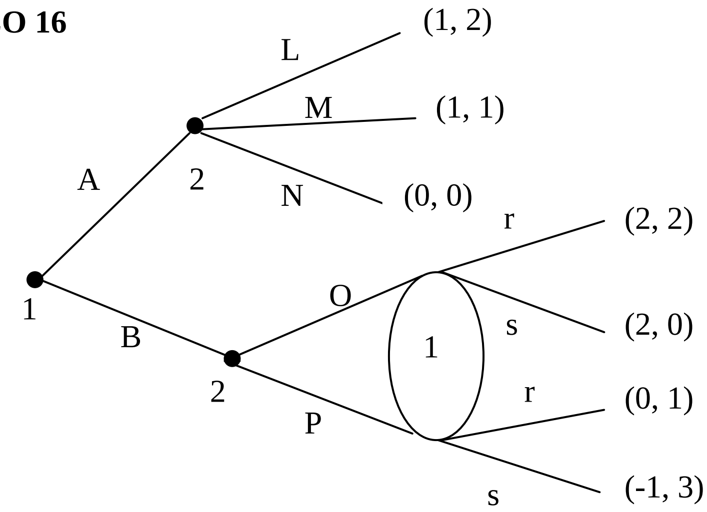
En la segunda etapa de la inducción retroactiva, nos fijamos en el anterior subjuego, el correspondiente a la jugadora 2. En este subjuego *R* es una acción dominada para ls jugadora 2. Dado que la jugadora 2 anticipa que la jugadora 1 no va a jugar *r* jugar *R* es una acción dominada o amenaza no creíble. Por tanto, la eliminamos y computamos el juego reducido



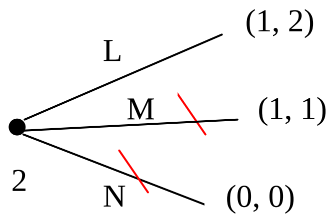
En su primer nodo de decisión, la jugadora 1 tiene como acción dominada (en el juego reducido) *I*, y por tanto jugará *D*. Luego el equilibrio perfecto en subjuegos es (*Ds*, *S*).

Podemos interpretar la lógica de la inducción retroactiva de la siguiente forma. Cuando la jugadora 2 tiene que elegir debería conjeturar que si juega *S* la jugadora 1 seguro que jugará *s*. La jugadora 2 es capaz de predecir el comportamiento racional de la jugadora 1 ya que esta último observa la acción elegida por ella. Si la jugadora 1 es igualmente racional debería anticipar el comportamiento de la jugadora 2 y jugar *D*.

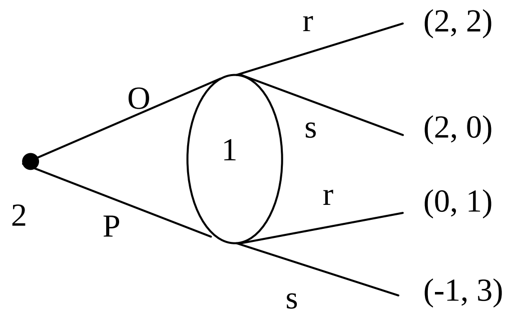
EJEMPLO 16



En este juego, hay multiplicidad de equilibrios de Nash y no podemos aplicar la inducción retroactiva ya que hay un subjuego de información imperfecta. Utilizaremos la definición de equilibrio perfecto en subjuegos y requeriremos que las partes relevantes de las estrategias de equilibrio sean también de equilibrio en los subjuegos.

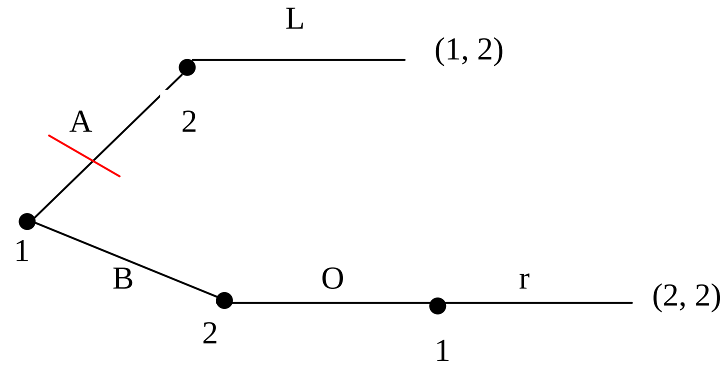


En el subjuego superior (el subjuego de información perfecta), la única amenaza creíble es *L*.



En el subjuego inferior (el subjuego de información imperfecta que empieza en el nodo de decisión inferior de la jugadora 2), es directo comprobar que el equilibrio de Nash es *O*, *r*.

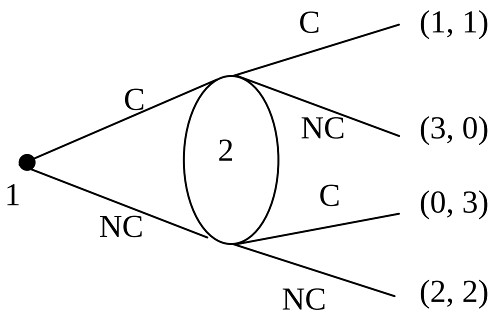
En su primer nodo de decisión, la jugadora 1 tiene que elegir entre *A* y *B* anticipando que si elige *A* la jugadora 2 jugará *L* y si elige *B*, entonces ambas jugarán el equilibrio de Nash (del subjuego) *O*, *r*. En consecuencia, la jugadora 1 elige *B*.



Por tanto, el equilibrio perfecto en subjuegos es (*Br*, *LO*): las partes relevantes de las estrategias de equilibrio son también de equilibrio en cada uno de los subjuegos.

1.3. **Juegos repetidos**

EJEMPLO 2: Dilema de la prisionera



		2: C	2: NC
1	C	(1, 1)	(3, 0)
	NC	(0, 3)	(2, 2)

Cuando el juego se juega una vez, (*C*, *C*) es un equilibrio de Nash en estrategias dominantes y la cooperación o colusión entre las jugadoras no se puede sostener como equilibrio. Aunque las jugadoras obtendrían mayores pagos en la combinación de estrategias (*NC*, *NC*) ambas tendrían incentivos a desviarse utilizando su estrategia dominante. En esta sección, vamos a estudiar las posibilidades de cooperación entre las jugadoras cuando el juego se repite.

1.3.1. **Horizonte temporal finito**

Supongamos que el juego (el dilema de la prisionera) se repite un número finito de veces: **T** (conocido por ambos jugadoras). Conocemos que si T = 1 el único equilibrio de Nash del juego es (*C*, *C*).

Lo primero que hay que notar es que si el juego se repite durante T periodos, una estrategia de una jugadora en el juego repetido debe indicar lo que haría esta jugadora en cada etapa del juego contingente con la historia pasada.

Vamos a utilizar un argumento de *inducción retroactiva* para mostrar que en el único equilibrio perfecto en subjuegos de este juego repetido cada jugadora (independientemente de la historia pasada) elegirá "confesar" en cada etapa del juego. Consideremos T, t = 1, 2,….., T, iteraciones del dilema de la prisionera.

Comencemos mirando al periodo **T**: en esta última etapa del juego, todo lo anterior (la historia pasada del juego) resulta irrelevante (ya que no existe futuro) y sólo queda por jugar una vez el dilema del prisionero. Por tanto, como cada jugadora tiene como estrategia dominante (cuando el juego se juega sólo una vez) "confesar", en el último periodo cada jugadora decidirá "confesar". La única razón para jugar "no confesar" en una etapa del juego, sería para intentar mejorar en el futuro, ya que esta acción podría ser interpretada como un signo de buena voluntad por la otra jugadora, consiguiendo su cooperación. Pero en la última etapa del juego ya no hay futuro, y, por tanto, (*C*, *C*) es inevitable.

Consideremos ahora el periodo T-1. Dado que las jugadoras anticipan que en el último periodo no van a cooperar, lo mejor que pueden hacer en el periodo T-1 es seguir su estrategia dominante a corto plazo, es decir, "confesar". La única razón para jugar "no confesar" en esta etapa del juego sería para intentar mejorar en el futuro, pero en el periodo T las jugadoras elegirán (*C*, *C*). El mismo argumento se aplicaría a los periodos T-2, T-3,….hasta el periodo 1. Por tanto, el equilibrio perfecto en subjuegos del dilema de la prisionera repetido un número finito de veces T, consiste simplemente en T repeticiones del equilibrio de Nash a corto plazo. Por tanto, si el juego se repitiera un número finito (y conocido) de veces, en el único equilibrio perfecto en subjuegos cada jugadora elegiría su estrategia dominante a corto plazo en cada ronda del juego. Luego la cooperación entre las jugadoras no se puede sostener como equilibrio cuando el horizonte temporal es finito.

1.3.2. **Horizonte temporal infinito**

Hay dos formas de interpretar un horizonte temporal infinito:

(i) *Interpretación literal*: el juego se repite infinitos periodos. En este contexto, cuando una jugadora compara una estrategia con otra debería comparar el valor presente descontado de las respectivas ganancias. Sea δ el factor de descuento, $0 < \delta < 1$. Si r es el tipo de interés $\delta = \frac{1}{1+r}$. El factor de descuento mide cuánto valoramos el futuro en comparación con el presente. Así, si $\delta = 0$ (que corresponde con $r = \infty$) entonces solo nos interesa el presente, mientras que si $\delta = 1$ (que corresponde con $r = 0$) entonces el futuro nos importa lo mismo que el presente.

(ii) *Interpretación informacional*: no se conoce la duración del juego. En cada etapa del juego, existe una probabilidad $0 < \delta < 1$ de que el juego continúe. En este marco, cada jugadors debería comparar el pago esperado (que también se podría descontar) de las diferentes estrategias.

En este contexto, una estrategia de una jugadora especificará su comportamiento en cada periodo $\boldsymbol{t}$ como una función de la historia pasada del juego. Represente $H_{t-1} = \{s_{1\tau}, s_{2\tau}\}_{\tau=1}^{t-1}$, donde $s_{i\tau} \in \{C, NC\}$, la historia pasada del juego.

En primer lugar, nótese que hay un equilibrio perfecto en subjuegos del juego infinitamente repetido en el que cada jugadora juega C (su estrategia dominante a corto plazo) en cada periodo. Cada jugadora tendría como estrategia "confesar en cada periodo con independencia de la historia pasada del juego".

Vamos a ver si además del anterior equilibrio, hay algún equilibrio perfecto en subjuegos en el que las jugadoras cooperen. Consideremos la siguiente combinación de estrategias a largo plazo. $s_i^c \equiv \{s_{it}(H_{t-1})\}_{t=1}^{\infty}$

donde,

$$s_{it}(H_{t-1}) = \begin{cases} NC & \text{si todos los elementos de } H_{t-1} \text{ son iguales a } (NC, NC) \text{ o } t = 1 \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

i =1,2.

Podemos resumir esta estrategia de la siguiente forma:

"Cooperar (no confesar) en cada periodo si anteriormente se ha cooperado (es decir se ha jugado no confesar periodo tras periodo) o $t = 1$. No cooperar (confesar) durante el resto del juego si anteriormente alguna jugadora se ha desviado de la cooperación".

Nótese que estas estrategias a largo plazo incorporan "amenazas implícitas de castigo" en caso de violación del acuerdo (implícito) de cooperación. La amenaza para que sea creíble debe ser equilibrio de Nash.

Para ver si en este contexto se puede sostener como equilibrio la cooperación, tenemos que comprobar que las jugadoras no tienen incentivos a desviarse; es decir, que la combinación de estrategias (s_1^c, s_2^c) constituye un equilibrio de Nash del juego repetido. El valor presente descontado de las ganancias futuras de la jugadora *i* de cooperar viene dado por:

$$\pi_i(s_i^c, s_j^c) = 2 + 2\delta + 2\delta^2 + \ldots. = 2(1 + \delta + \delta^2 + \ldots) = \frac{2}{1-\delta}$$

Supongamos que la jugadora *i* se desvía y lo hace en el primer periodo del juego. Dado que la otra jugadora si sigue su estrategia le penalizará durante el resto del juego, lo mejor que puede hacer si confiesa en el primer periodo, es confesar también durante el resto del juego. Sus ganancias vendrían dadas por:

$$\pi_i(s_i, s_j^c) = 3 + 1\delta + 1\delta^2 + \ldots = 3 + \delta(1 + \delta + \delta^2 + \ldots) = 3 + \delta \frac{1}{1-\delta}$$

La cooperación será equilibrio de Nash si ninguna de las jugadoras tiene incentivos a desviarse; es decir, si $\pi_i(s_i^c, s_j^c) \geq \pi_i(s_i, s_j^c)$. Es inmediato comprobar que si $\delta \geq \frac{1}{2}$ ninguna de las jugadoras tiene incentivos a romper el acuerdo de colusión.

Vamos a comprobar a continuación como el equilibrio es perfecto en subjuegos: es decir, que las amenazas son creíbles. Consideremos un subjuego que surge después de que una desviación se ha producido. La estrategia de cada jugadora exige "confesar" en todo periodo futuro, independientemente del comportamiento de su rival. Este par de estrategias constituye un equilibrio de un dilema del prisionero infinitamente repetido ya que cada jugadora si no se desvía obtendría un pago de (si la desviación se ha producido en el periodo T-1)

$$\delta^{T-1}(1 + \delta + \delta^2 + \ldots) = \frac{\delta^{T-1}}{1-\delta}$$

mientras que obtendría un pago de 0 cada periodo que se desviase de la estrategia cooperativa.

El análisis anterior sirve como ejemplo de un principio general que ocurre en situaciones de juegos repetidos con horizonte temporal infinito. En estos juegos es posible sostener como equilibrio comportamientos que no son de equilibrio en el corto plazo. Esto se produce gracias a la "amenaza implícita de castigo" de que en caso de incumplimiento del acuerdo se "castiga" durante el resto del juego. De modo que el aumento de beneficios (derivado de la violación del acuerdo) a corto plazo, no compensa la pérdida de beneficios durante el resto del juego.

1.4. **Conclusiones**

Hemos visto diferentes métodos de resolución de juegos, aunque ninguno de ellos está exento de problemas. El criterio de dominación (eliminación de estrategias dominadas) aunque útil para resolver algunos juegos, no sirve para otros al no realizar ninguna propuesta de solución. La versión "débil" de este criterio (eliminación de estrategias débilmente dominadas) es de gran utilidad para seleccionar entre los equilibrios de Nash, especialmente en juegos en forma normal o estratégica. El criterio de inducción retroactiva permite realizar propuestas de solución en juegos en forma extensiva. Tiene la importante propiedad de que para juegos de información perfecta y sin empates conduce a una única propuesta de solución. Pero la posibilidad de empates, la existencia de información imperfecta y la racionalidad ilimitada que puede requerir en algunos juegos, son los principales problemas que presenta. Este criterio de inducción retroactiva resulta de gran utilidad para seleccionar entre los equilibrios de Nash (en juegos en forma extensiva). De la utilización conjunta de este criterio y de la noción de equilibrio de Nash surge el concepto de equilibrio perfecto en subjuegos.

Aunque también presenta problemas (ineficiencia, inexistencia y multiplicidad) el equilibrio de Nash es el criterio de solución más general y más ampliamente utilizado para resolver juegos. Se considera que ser equilibrio de Nash es una condición necesaria (aunque no suficiente) para que cualquier propuesta de solución sea una predicción razonable del comportamientos racional de los jugadores. Si para algún juego se propone como solución una combinación de estrategias que no constituye un equilibrio de Nash, esta predicción sobre el comportamiento de los jugadores se vería desmentida por el propio desarrollo del juego. Al menos un jugador tendría incentivos a cambiar su estrategia con respecto a la predicha para él. En conclusión, aunque presenta problemas, existe cuasi-unanimidad sobre que toda propuesta de solución debe ser como mínimo equilibrio de Nash.