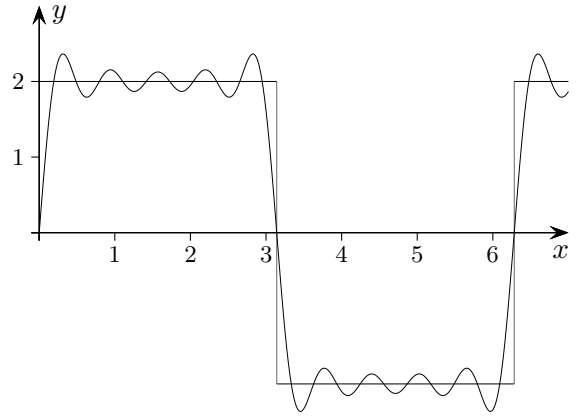


1. Fourier-Reihen
2. Beispiele
3. Periodenintervall T
4. Quadratische Abweichung
5. Amplitudenspektrum
6. Amplitudenspektrum, Grafik
7. Weg zum Nichtperiodischen
8. Komplexe Schreibweise
9. Komplexe Schreibweise, Periodenintervall T
10. Koeffizienten der komplexen Fourierreihe
11. Fourier-Transformation
12. Fourier-Transformierte anschaulich
13. Amplituden-Phasen-Notation
14. Konvergenz einer Fourier-Reihe
15. Dirichlet-Kerne
16. Lemma von Riemann
17. Satz von Dirichlet
18. Fejér-Kerne
19. Fourier-Reihe, Herleitung im Komplexen
20. Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation
21. Faltung

↑ Fourier-Reihen



$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < \pi \\ -2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) \approx \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x \right)$$

Fourier (1768 - 1830) bewies, dass periodische Funktionen (unter bestimmten Voraussetzungen) durch eine Summe einfacher trigonometrischer Funktionen approximiert werden können. Die Güte der Näherung steigt mit der Anzahl der Summanden, siehe [GeoGebra](#)

Für eine *ungerade* Funktion (Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung) sei der Ansatz:

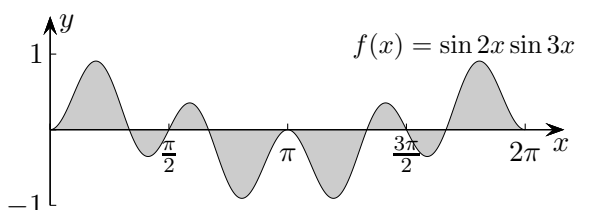
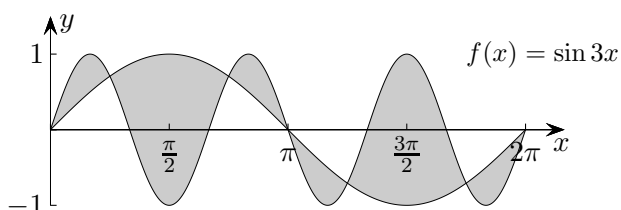
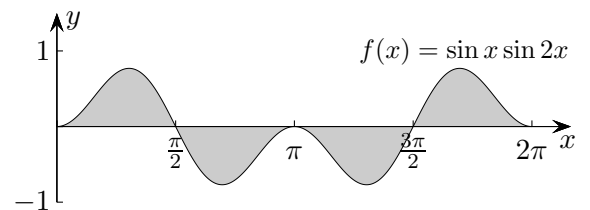
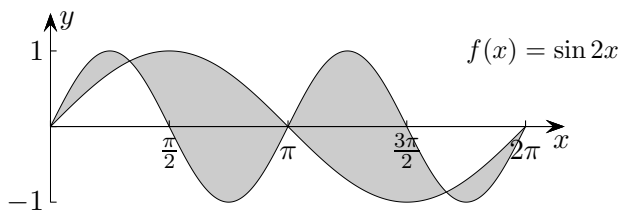
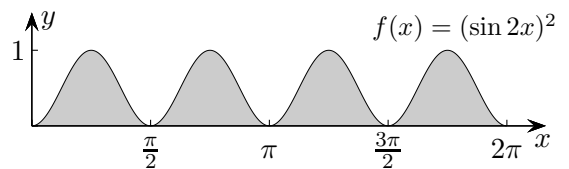
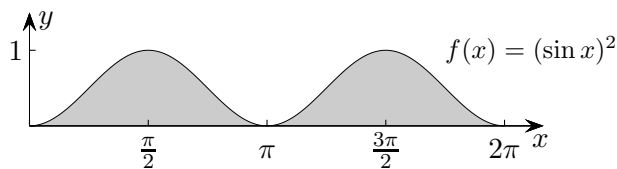
$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \dots \quad | \cdot \sin x \quad | \cdot \sin 2x \quad | \cdot \sin 3x \quad | \dots$$

Um b_1 zu ermitteln, werden beide Seiten mit $\sin x$ multipliziert und integriert, für b_2 mit $\sin 2x$, usw.:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin x dx = b_1 \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx + \underbrace{b_2 \int_0^{2\pi} \sin 2x \sin x dx + b_3 \int_0^{2\pi} \sin 3x \sin x dx + b_4 \int_0^{2\pi} \sin 4x \sin x dx + \dots}_{=0}$$

Die Sinusfunktionen haben eine erstaunliche Eigenschaft:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (\text{kann vermutet werden, siehe Graphen})$$



↑ Fourier-Reihen

Die Koeffizienten der Sinus-Reihe werden daher mit

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

berechnet.

Für die Rechteckfunktion ist z. B.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cdot \sin x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-2) \sin x \, dx = \dots = \frac{8}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cdot \sin 2x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-2) \sin 2x \, dx = \dots = 0$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cdot \sin 3x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-2) \sin 3x \, dx = \dots = \frac{8}{3\pi}$$

Das Vorgehen kann verallgemeinert werden.

Für eine beliebige 2π -periodische Funktion erhalten wir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{für } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Für eine gerade Funktion (Graph zur y -Achse achsensymmetrisch) entfallen die Sinus-Terme.

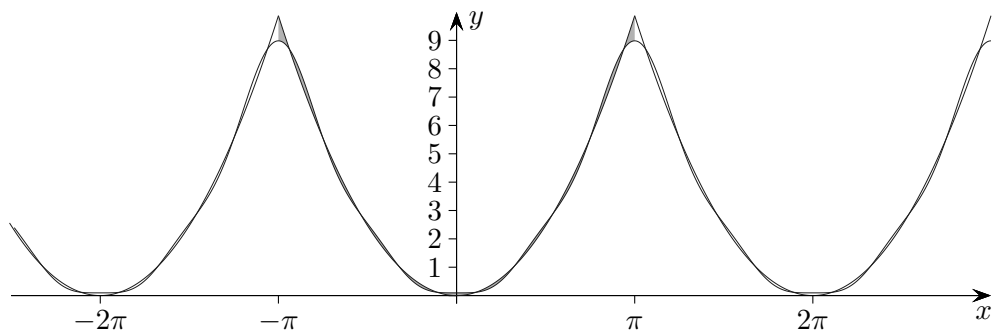
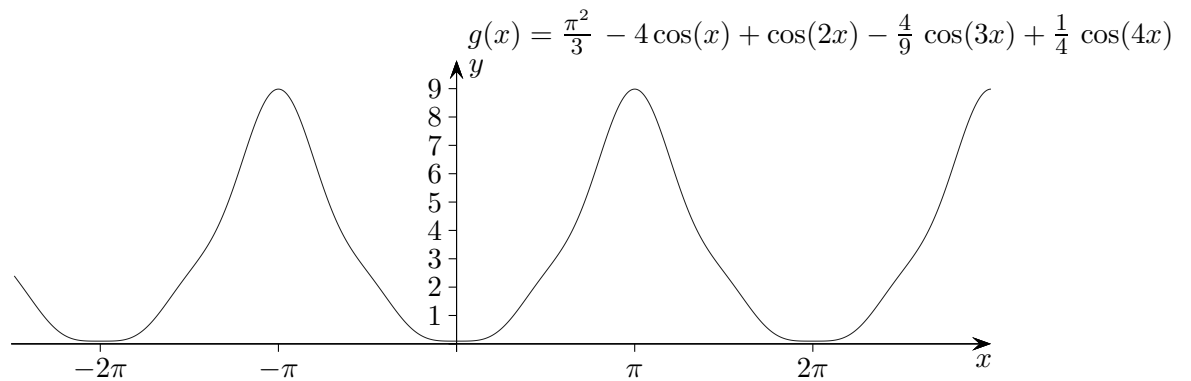
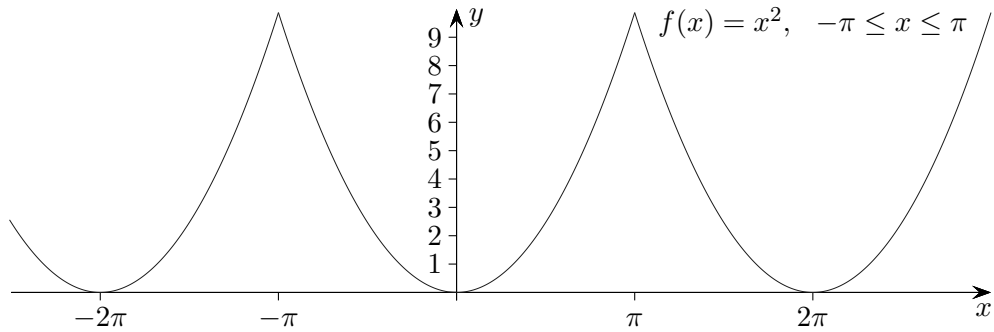
$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq \pi \\ -2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

WolframAlpha erzeugt mit der Anweisung (das Periodenintervall muss hier $[-\pi, \pi]$ sein)

```
FourierTrigSeries[Piecewise[{{-2, -Pi < x < 0}, {2, 0 < x < Pi}}], x, 7]
```

die Ausgabe $\frac{8 \sin(x)}{\pi} + \frac{8 \sin 3(x)}{3\pi} + \frac{8 \sin 5(x)}{5\pi} + \frac{8 \sin 7(x)}{7\pi}$.

↑ Beispiel, periodische Fortsetzung



$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} \quad \text{und für } k \geq 1 \text{ gilt}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k} x^2 \sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin(kx) dx \right)$$

$$= 0 - \frac{4}{k\pi} \left(-\frac{1}{k} x \cos(kx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx) dx \right)$$

$$= \frac{4(-1)^k}{k^2} + 0$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

Für $x = \pi$ ergibt sich

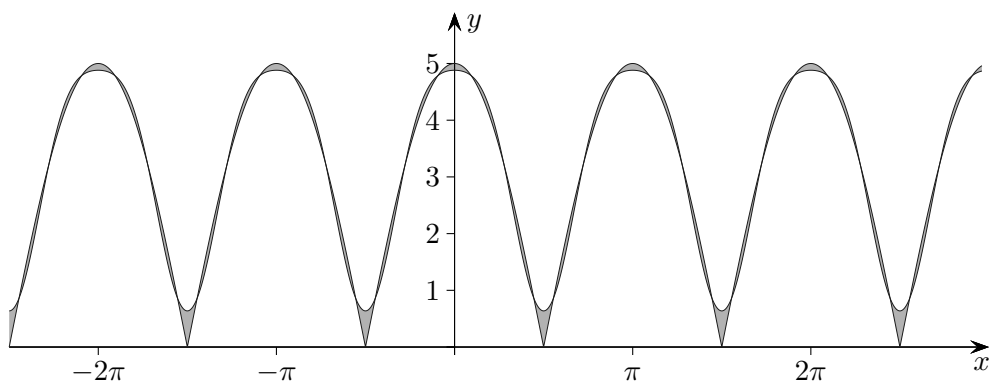
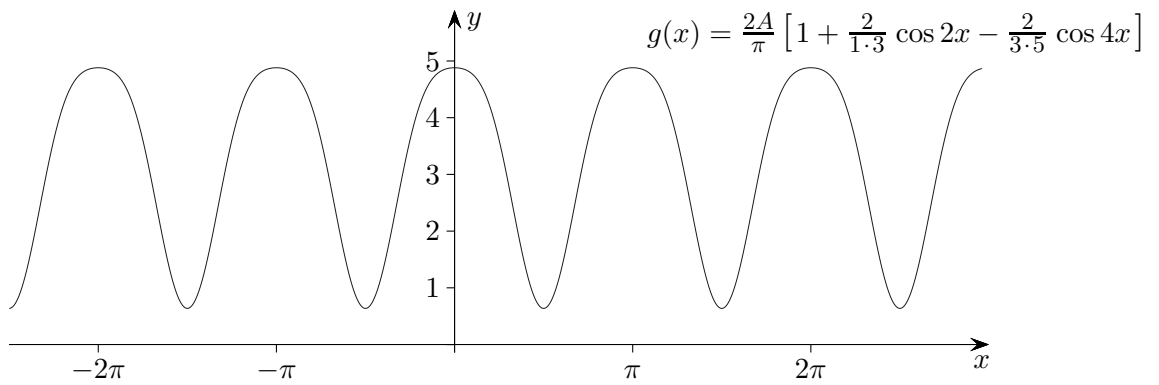
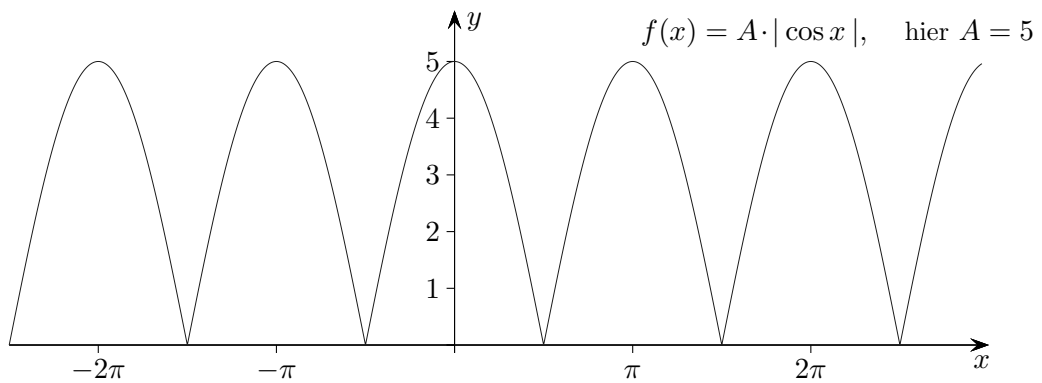
$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \implies \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

WolframAlpha erzeugt mit der Anweisung (das Periodenintervall muss hier $[-\pi, \pi]$ sein)

`FourierTrigSeries[Piecewise[{{x^2, -Pi < x < Pi}}], x, 7]`

$$\frac{\pi^2}{3} - 4 \cos(x) + \cos(2x) - \frac{4}{9} \cos(3x) + \frac{1}{4} \cos(4x) - \frac{4}{25} \cos(5x) + \frac{1}{9} \cos(6x) - \frac{4}{49} \cos(7x).$$

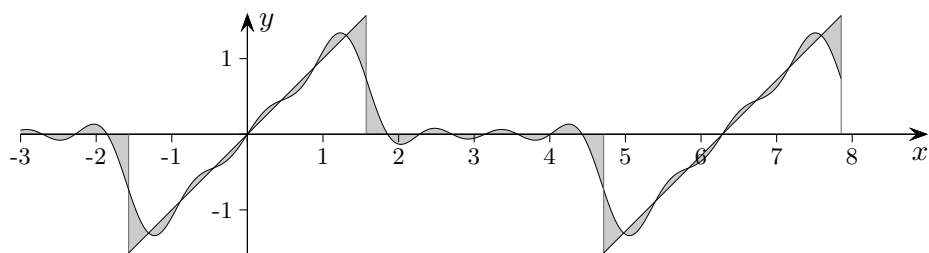
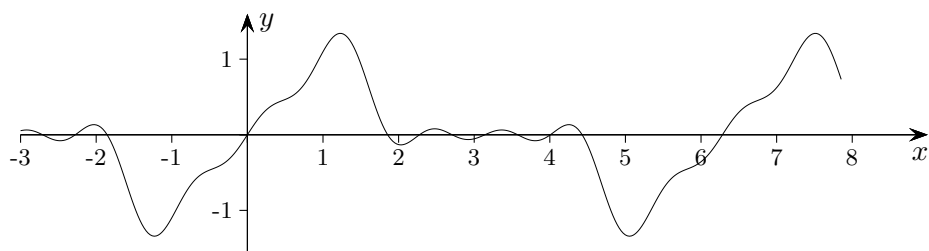
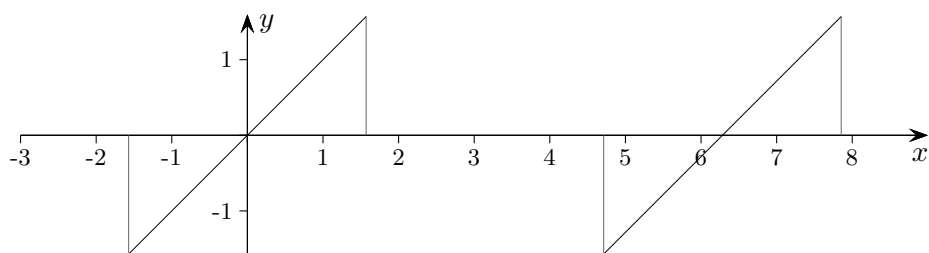
↑ Beispiel, die umgeklappte Cosinus-Funktion



$$f(x) = \frac{2A}{\pi} \left[1 + \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4x + \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6x - \dots \right]$$

↑ Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \quad T = [-\pi, \pi]$$



$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{2}{25\pi} \sin 5x + \frac{1}{6} \sin 6x + \dots$$

siehe GeoGebra

↑

© Roolfs

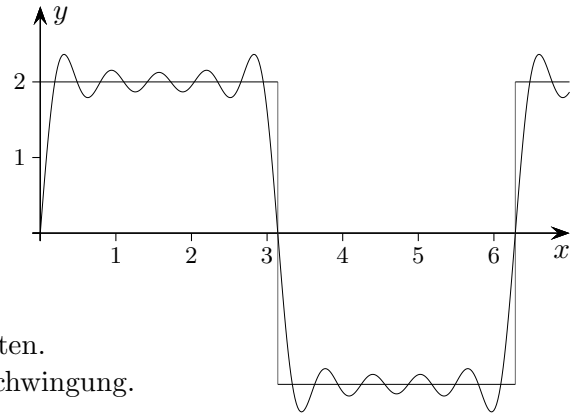
↑ Periodenintervall T durch Strecken/Stauchen

$$f(x + T) = f(x)$$

$$[0, T] \xrightarrow{\frac{2\pi}{T}x} [0, 2\pi] \xrightarrow{\sin} \sim$$

Sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

ωx bildet das Intervall $[0, T]$ auf $[0, 2\pi]$ ab.

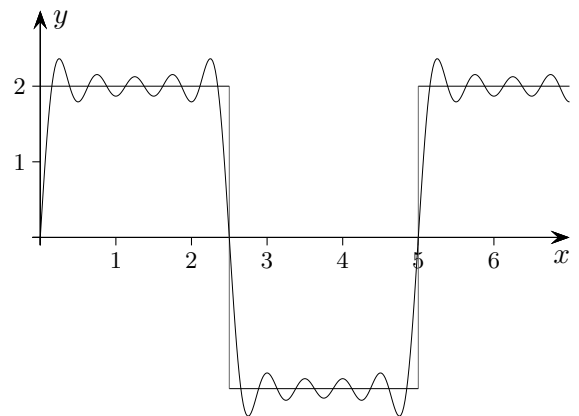


In einer Fourier-Reihe treten nur Terme auf, die ein Vielfaches der (Grund-)Kreisfrequenz ω , also $n\omega$ enthalten. $\sin(\omega x)$ bzw. $\cos(\omega x)$ vollführen auf $[0, T]$ genau eine Schwingung.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < \pi \\ -2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) \approx \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x \right)$$

Sei $T = 5$.



$$g(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{5}{2} < x < 5 \end{cases}$$

$$g(x) \approx \frac{8}{\pi} \left(\sin \omega x + \frac{1}{3} \sin 3\omega x + \frac{1}{5} \sin 5\omega x + \frac{1}{7} \sin 7\omega x + \frac{1}{9} \sin 9\omega x \right)$$

x wird in $f(x)$ lediglich durch ωx ersetzt.

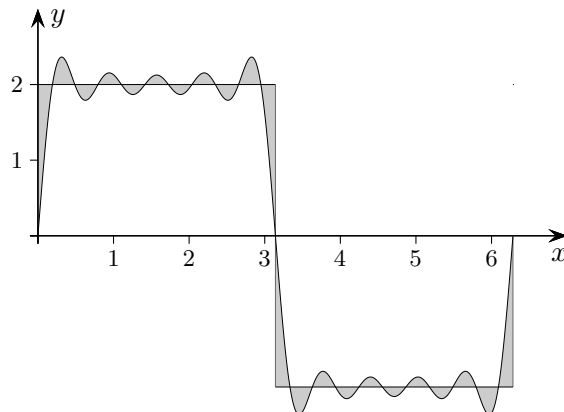
Bei theoretischen Überlegungen kann man sich auf ein Periodenintervall der Länge 2π beschränken.

↑

↑ Quadratische Abweichung

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq \pi \\ -2 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{9} \sin 9x \right)$$



Als Maß für die Güte der Approximation eignet sich der Ausdruck:

$$F = \int_0^{2\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx$$

Mit dem Ansatz

$$g(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \dots + b_8 \sin 8x + b_9 \sin 9x$$

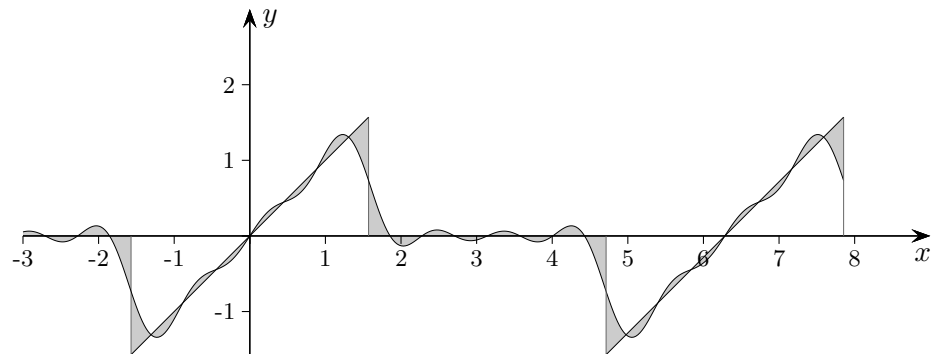
führt die Fragestellung

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx \quad \longrightarrow \quad \text{Minimum}$$

zu den bekannten Koeffizienten.

Hierbei sind die Klammern aufzulösen, die Sinus-Integrationsregeln anzuwenden, ein b_k als variabel zu betrachten, die partielle Ableitung zu bilden, usw.

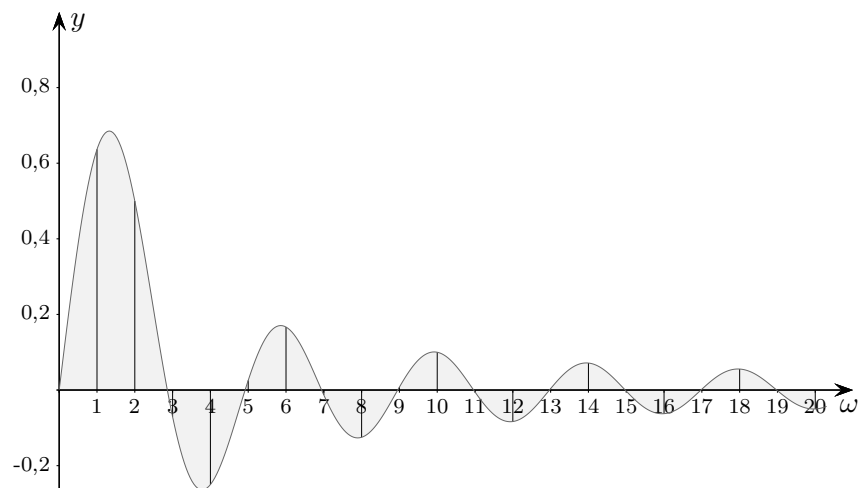
↑ Amplitudenspektrum



$$f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \quad T = [-\pi, \pi]$$

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{2}{9\pi} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{2}{25\pi} \sin 5x + \frac{1}{6} \sin 6x + \dots$$

Einen sehr anschaulichen Einblick in die Approximation der Sägezahnfunktion gewinnt man aus dem Amplitudenspektrum. Hierbei werden die Amplituden (Koeffizienten) der einzelnen Schwingungen als Strecken dargestellt.

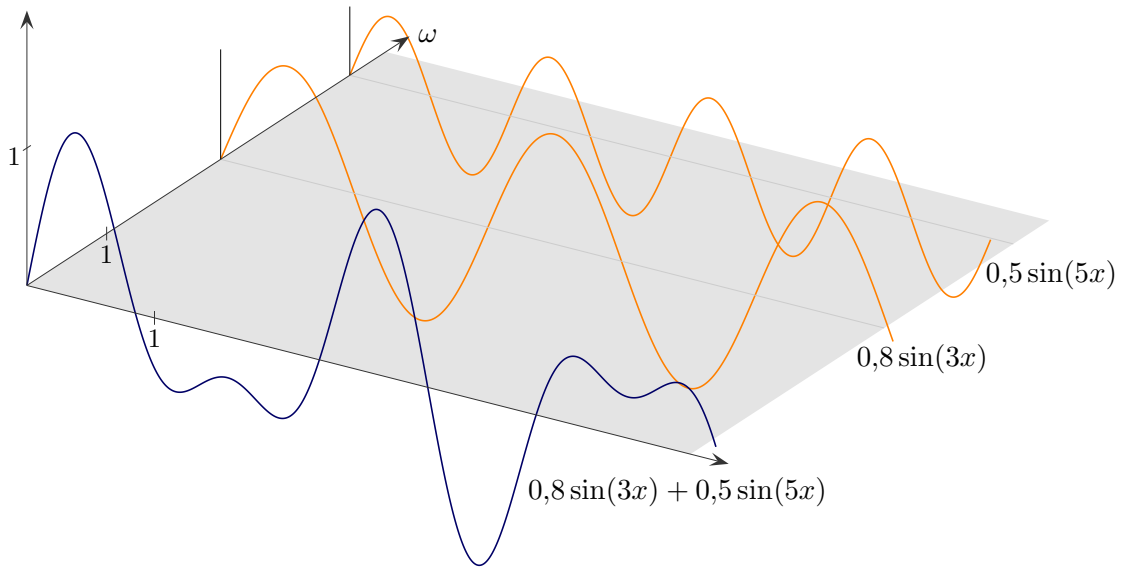


Zur Herkunft der Funktion beachte:

$$n \rightarrow b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2 \sin \frac{\pi n}{2} - \pi n \cos \frac{\pi n}{2}}{n^2 \pi}$$

↑

↑ Amplitudenspektrum



↑ Periodenintervall T

$$f(x + T) = f(x)$$

$$[0, T] \xrightarrow{\frac{2\pi}{T}x} [0, 2\pi] \xrightarrow{\sin} \sim$$

Sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (Grundfrequenz), ωx bildet das Intervall $[0, T]$ auf $[0, 2\pi]$ ab.

Mit der kleinen Frequenz $\omega = \frac{2\pi}{20}$ erzeugt $\sin(\omega x)$ auf dem Intervall $[0, 20]$ genau eine Schwingung.

Die Herleitung der Fourier-Reihe kann verallgemeinert werden.

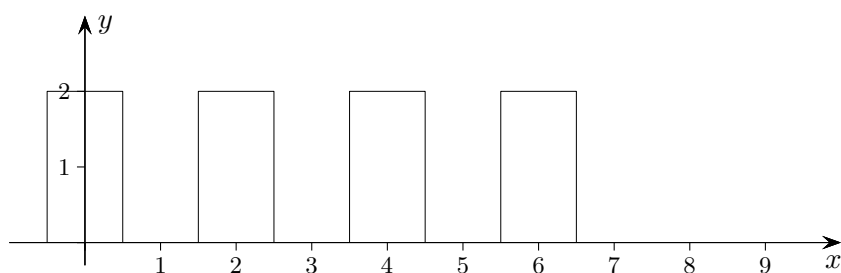
Für eine beliebige T -periodische Funktion erhalten wir (unter gewissen Voraussetzungen):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(n\omega x) dx \quad \text{für } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin(n\omega x) dx$$



Für periodische Rechteck-Impulse ermitteln wir das Amplitudenspektrum, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Für $n \geq 1$ ist:

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} 2 \cos(n\omega x) dx = \dots = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\omega n}{2}$$

↑

© Roolfs

↑ Amplitudenspektrum

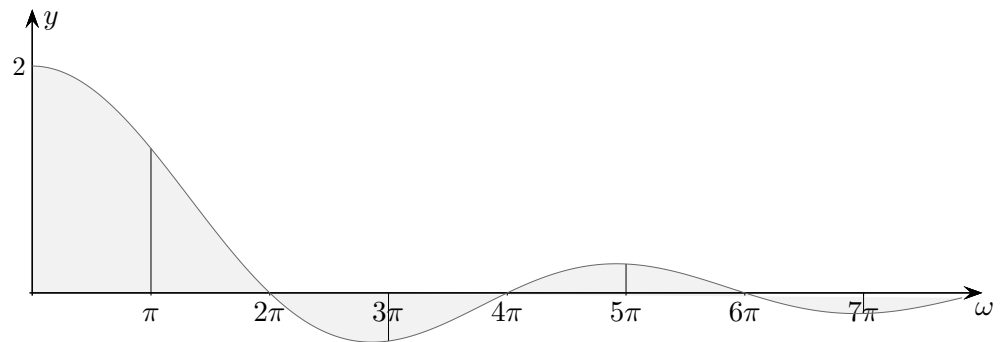
Um zu untersuchen, was passiert, wenn die Periodenlänge T vergrößert wird, und wir uns dann einer nichtperiodischen Funktion annähern, werden die Amplituden in Abhängigkeit von ω betrachtet. Wird T verdoppelt, halbiert sich ω (umgekehrt proportional).

Für das vorige Beispiel ergibt sich mit $T = 2$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$:

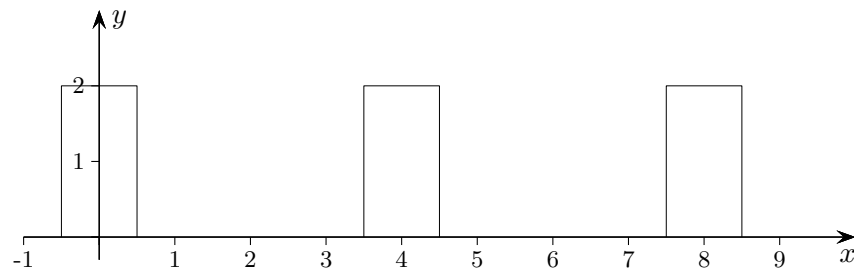
$$a_n = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\omega_0 n}{2}$$

$$\omega = n\omega_0$$

$$A(\omega) = \frac{4}{\omega} \sin \frac{\omega}{2}$$



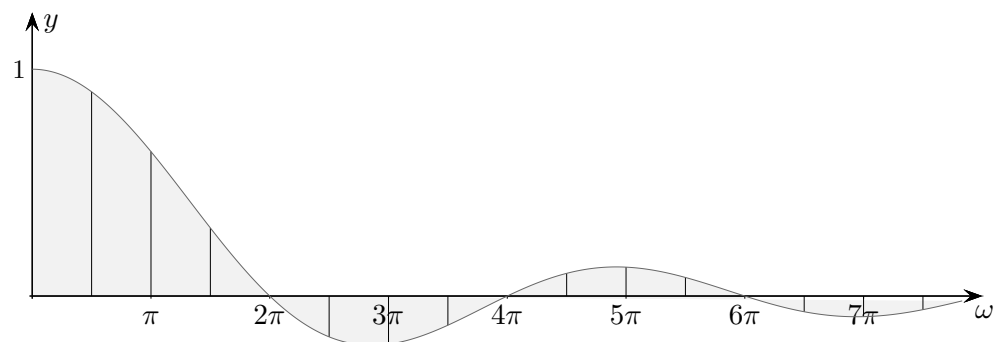
Sei nun $T = 4$.



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

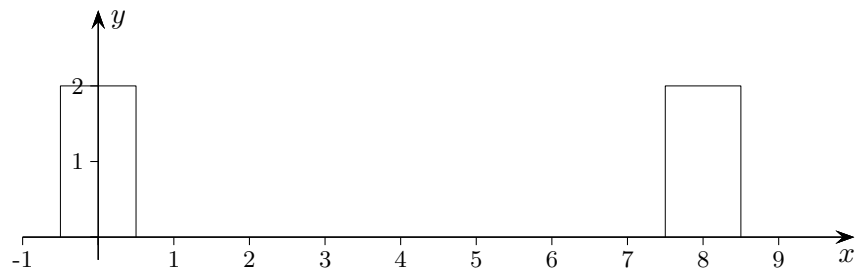
$$a_n = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\omega_0 n}{2}, \quad \omega = n\omega_0$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2}$$

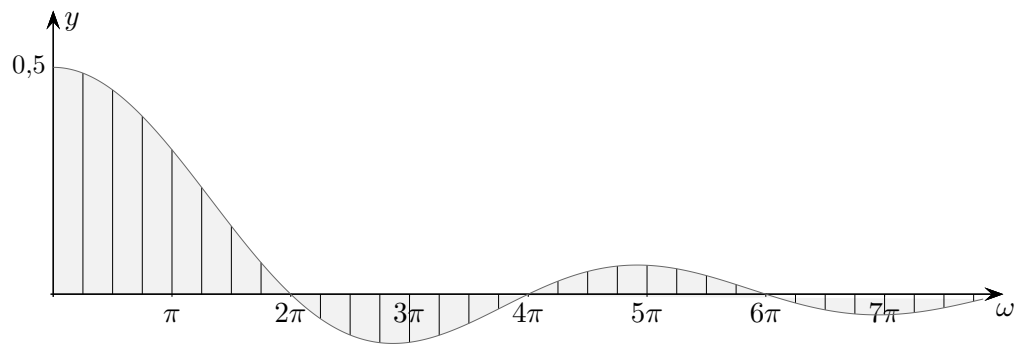


↑ Weg zum Nichtperiodischen

Sei nun $T = 8$.



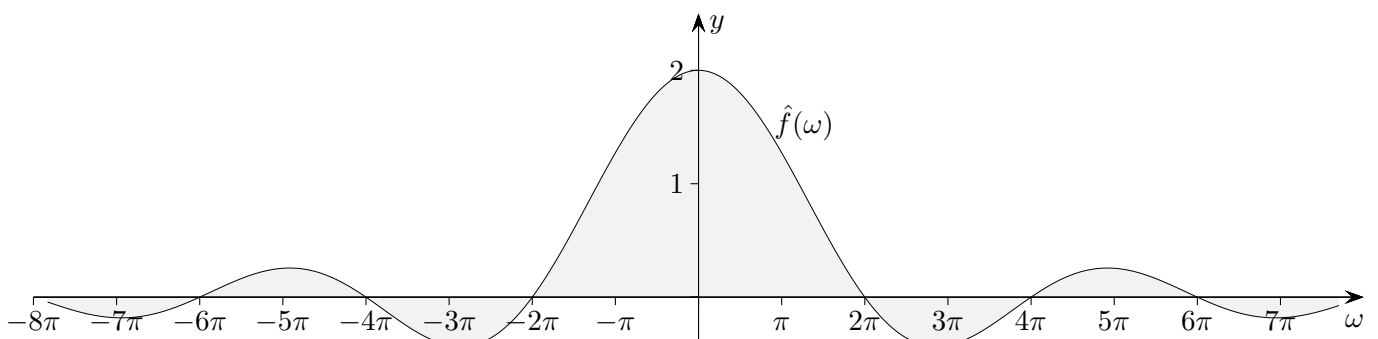
$$\omega_0 = \frac{\pi}{4}$$



Es zeichnet sich ab, was für $T \rightarrow \infty$ zu erwarten ist.

Für größer werdendes T werden die Amplituden kleiner. Die Nullstellen bleiben erhalten.

Wir gelangen zum Begriff der Fourier-Transformierten $\hat{f}(\omega)$.



↑

↑ Komplexe Schreibweise

Die Fourier-Reihe (Periode 2π) kann mit Hilfe der komplexen Zahlen kompakt und weiterführend als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

formuliert werden.

Benötigt wird:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x & \cos(-x) &= \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x \\ \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

Umrechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{beachte:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}a_0 & c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\ a_0 &= 2c_0 & a_n &= c_n + c_{-n} & b_n &= i(c_n - c_{-n}) \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \end{aligned}$$

Wie sich zeigen wird, sind in der Funktion $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-itx} \, dx$

alle Koeffizienten der Fourier-Reihe einer 2π -periodischen Funktion enthalten, wenn auch etwas versteckt. Siehe Ähnliches: [GeoGebra 1](#) [2](#) [3](#)

↑

↑ Komplexe Schreibweise, Periodenintervall T

Die exponentielle Form der Fourier-Reihe für das Periodenintervall $[0, T]$ und der Grundfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ lautet: } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$$

$$e^{in\omega x} = \cos n\omega x + i \sin n\omega x$$

$$e^{-in\omega x} = \cos n\omega x - i \sin n\omega x$$

$$\cos n\omega x = \frac{1}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x})$$

$$\sin n\omega x = \frac{1}{2i}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x})$$

Umrechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}) + \frac{b_n}{2i}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad \text{beachte: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{in\omega x} \end{aligned}$$

Dann folgt:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

$$a_0 = 2c_0 \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

$n > 0$:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T} \left(\int_T f(x) \cos n\omega x \, dx - i \int_T f(x) \sin n\omega x \, dx \right) = \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-in\omega x} \, dx$$

$n < 0$:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{T} \left(\int_T f(x) \cos |n|\omega x \, dx + i \int_T f(x) \sin |n|\omega x \, dx \right) = \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-in\omega x} \, dx$$

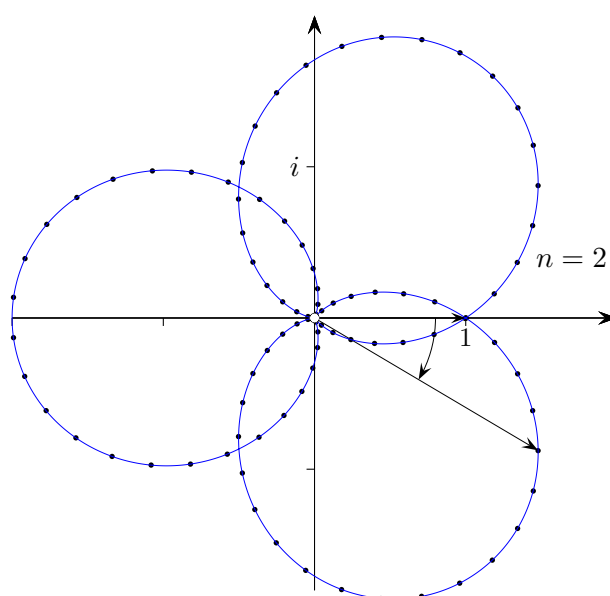
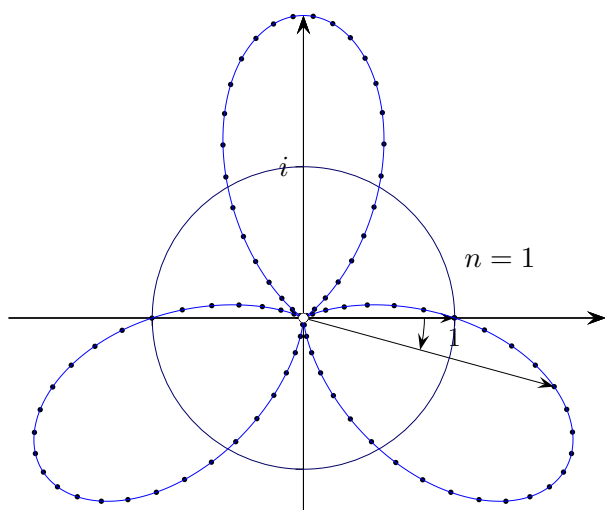
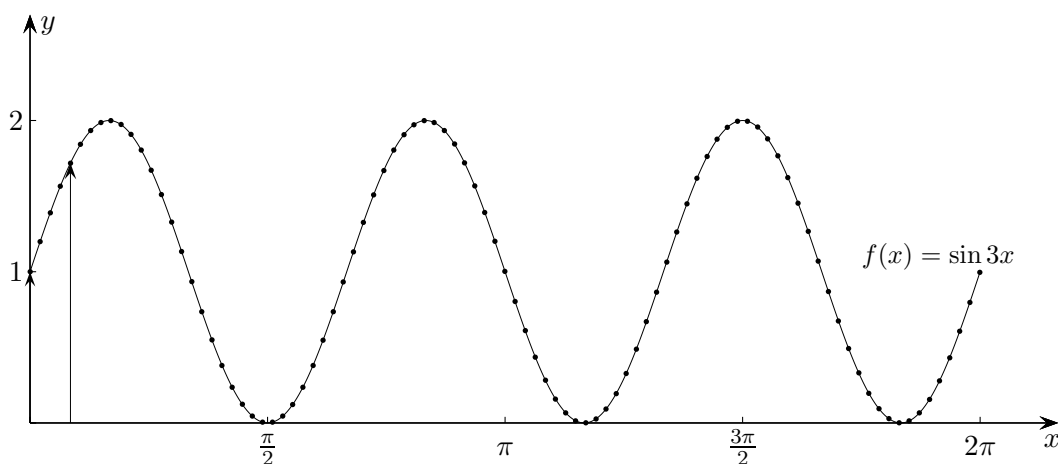
↑

© Roelfs

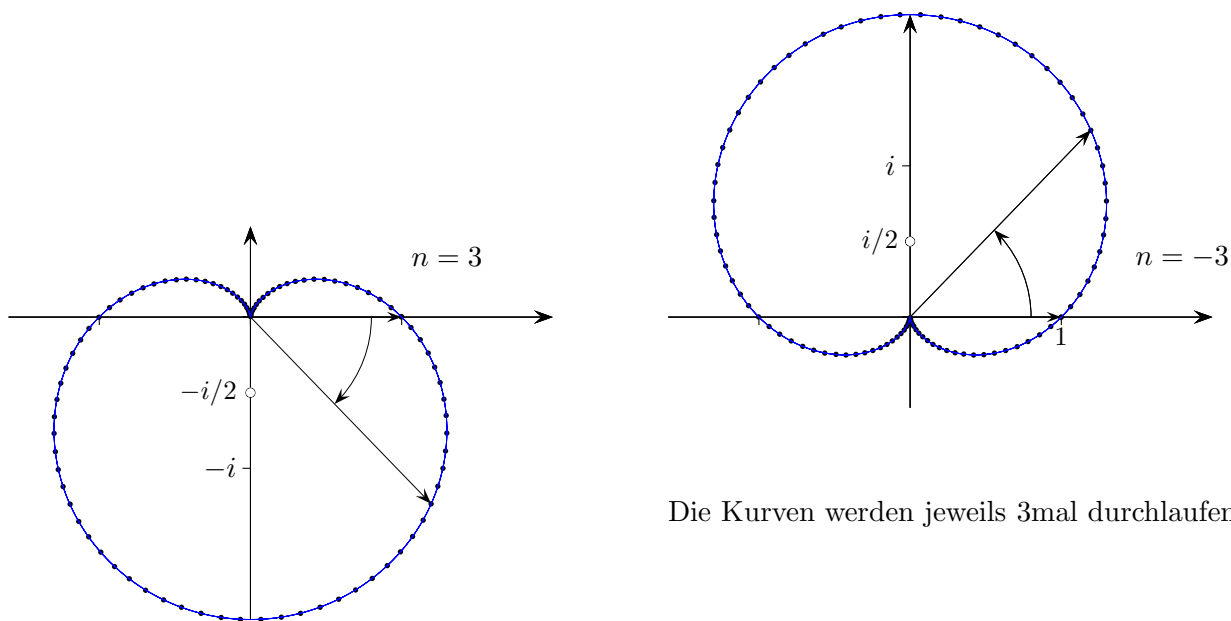
↑ Koeffizienten der komplexen Fourierreihe

Die Koeffizienten $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$ können veranschaulicht werden, $T = [0, 2\pi]$.

$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ durchläuft in der komplexen Ebene für $x = 0, \dots, 2\pi$ einen Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn n -mal. Mit dem Minus-Zeichen im Exponenten rotiert der Zeiger $f(x) e^{-inx}$ im Uhrzeigersinn um den Ursprung. Aus einer diskreten Approximation des Integrals ist zu erkennen, dass der Mittelwert aller Zeiger (auch als Schwerpunkt zu interpretieren) eine Näherung für c_n ist. c_n ist augenscheinlich nur für $n = \pm 3$ ungleich null.



↑ Koeffizienten der komplexen Fourierreihe

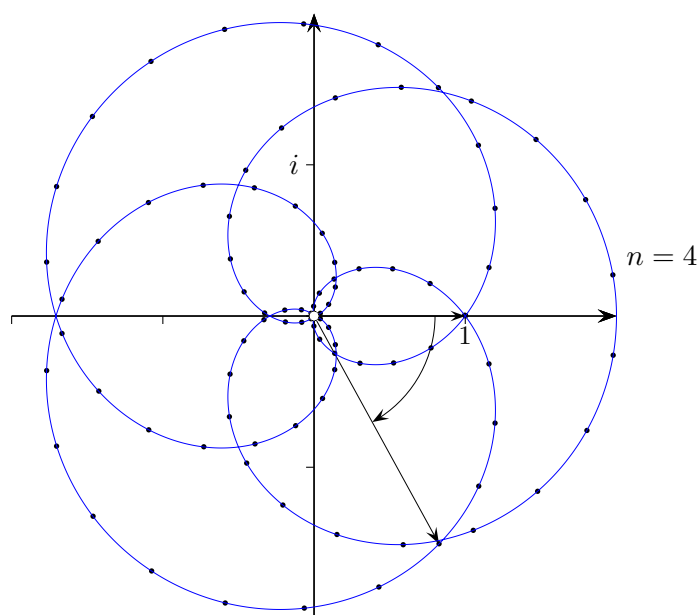


Die Kurven werden jeweils 3mal durchlaufen.

$$a_3 = c_3 + c_{-3} = -i/2 + i/2 = 0$$

$$b_3 = i(c_3 - c_{-3}) = i(-i/2 - i/2) = 1$$

$$f(x) = b_3 \sin 3x$$



Die Veranschaulichung von $c_n = \frac{1}{T} \int f(x) e^{-in\omega x} dx$

ebnet den Zugang zur Fouriertransformierten $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ von f .

Die Kreisfrequenz ω ist nun aus \mathbb{R} , das Periodenintervall ist unbegrenzt, der Faktor $\frac{1}{T}$ entfällt.

↑

© Roelfs

↑ Fourier-Transformation

Die komplexe Schreibweise für eine Fourier-Reihe mit der Periode T lautet:

$$* \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (Grundfrequenz)}$$
$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-in\omega x} dx$$

Mit c_n eingesetzt gelingt der Übergang $T \rightarrow \infty$ in wenigen Zeilen.

Sei T groß, dann ist $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ klein (siehe Weg zum Nichtperiodischen).
 $n\Delta\omega$, $n \in \mathbb{Z}$, unterteilt \mathbb{R} .

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Delta\omega x} \Delta\omega \text{ approximiert ein Integral der Art } \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega.$$

Das Einsetzen von

$$c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_T f(x) e^{-in\Delta\omega x} dx$$

in * liefert das benötigte $\Delta\omega$. Durch Umstellen ist zu erkennen, dass

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_T f(x) e^{-in\Delta\omega x} dx \right] e^{in\Delta\omega x} \Delta\omega$$

für $T \rightarrow \infty$ gegen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega x} d\omega$$

strebt.

Beachte: Die Variable ω nimmt die Werte $n\Delta\omega$ an.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

ist die Fourier-Transformierte von f .

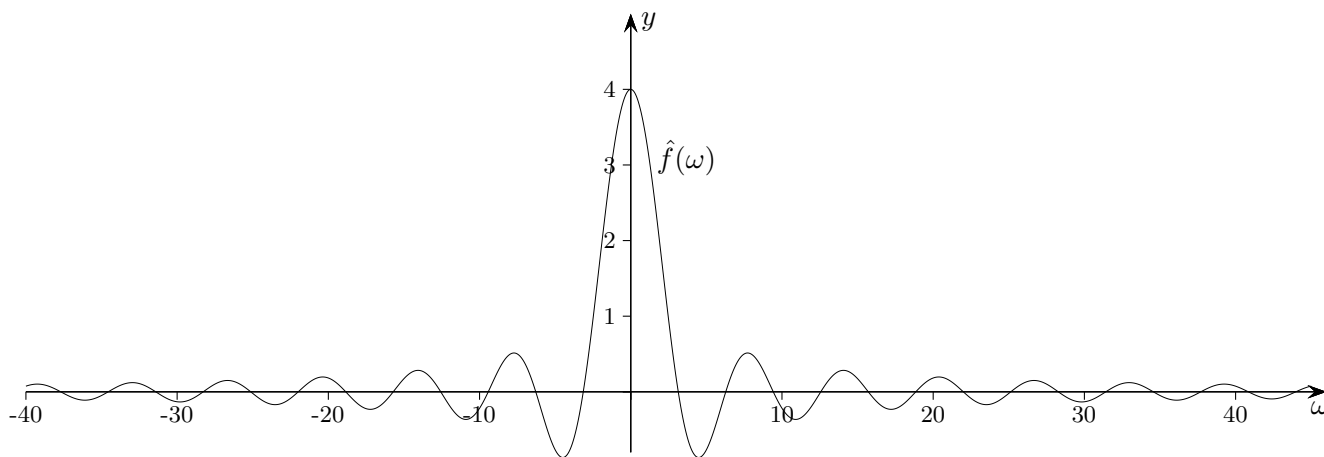
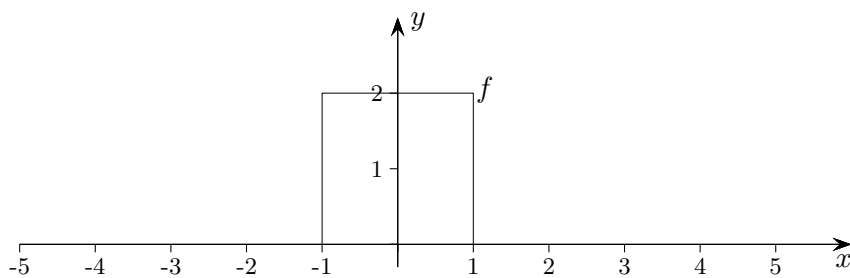
In der Literatur wird die Fourier-Transformierte auch mit dem Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ definiert.

Die Rücktransformation erfolgt mit:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

↑

↑ Fourier-Transformation



$$F(\omega) = \int_{-1}^1 2e^{-i\omega x} dx = \frac{2i}{\omega} e^{-i\omega x} \Big|_{-1}^1 = \frac{2i}{\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{4}{\omega} \sin(\omega)$$

$$\text{beachte: } \sin(\omega) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = -\frac{1}{2i} (e^{-i\omega} - e^{i\omega})$$

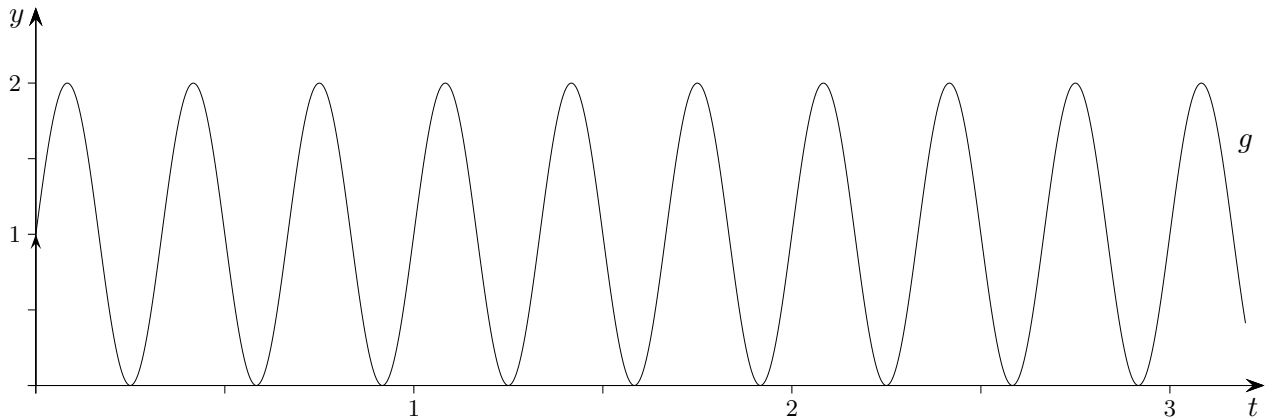
$$\text{Schreibweise } f(x) \circ \bullet \hat{f}(\omega) = \frac{4 \sin(\omega)}{\omega}$$

Mit [WolframAlpha](#) und der Anweisung

`sqrt(2*Pi)*FourierTransform[Piecewise[{{0, t <=-1}, {2, -1 < t <1}, {0, t >=1}},t,omega]`
kann das Ergebnis ermittelt werden.

↑ Fourier-Transformierte anschaulich

Der anschauliche Hintergrund der Funktion $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx$ soll anhand von $g(t) = \sin(3 \cdot 2\pi t)$ für $0 \leq t \leq 4$, 0 sonst, gezeigt werden, Zeit t in Sekunden. Die Frequenz von g ist $f = 3$ Hz (3 Schwingungen pro Sekunde).



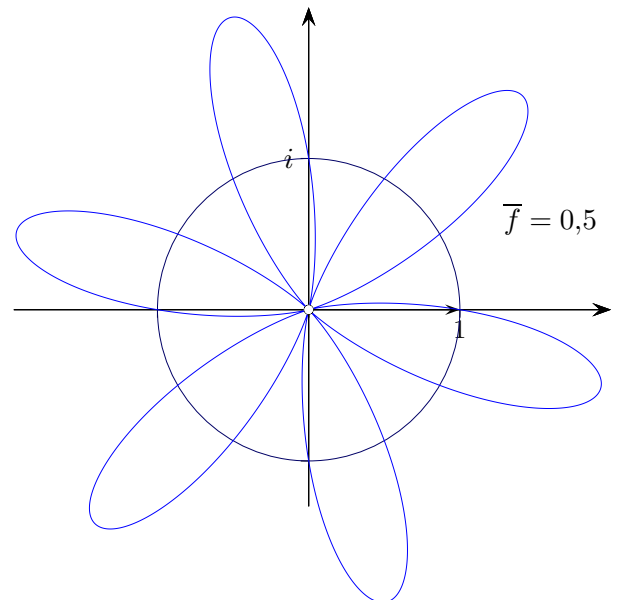
In der komplexen Ebene durchläuft der Zeiger $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$ einmal für $0 \leq t \leq 2\pi$ den Einheitskreis.

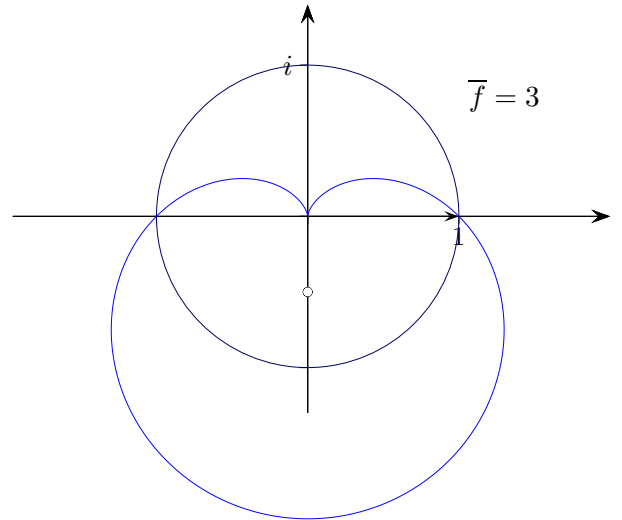
Der Zeiger $z = e^{i\omega t}$, $\omega = 2\pi f$, $f = 3$, durchläuft den Kreis in einer Sekunde 3-mal, weil $[0, 1] \xrightarrow{2\pi \cdot 3} [0, 2\pi \cdot 3] \rightarrow \bigcirc \bigcirc \bigcirc$.

Der Zeiger $z = e^{-i\omega t}$ dreht im Uhrzeigersinn \bigcirc .

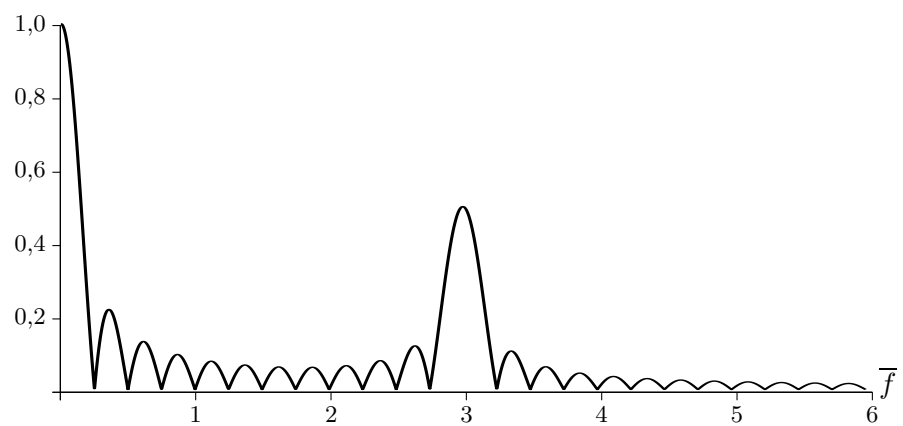
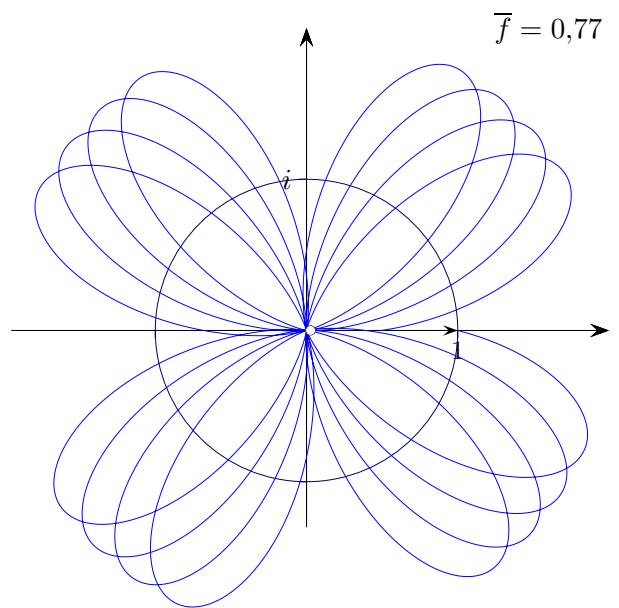
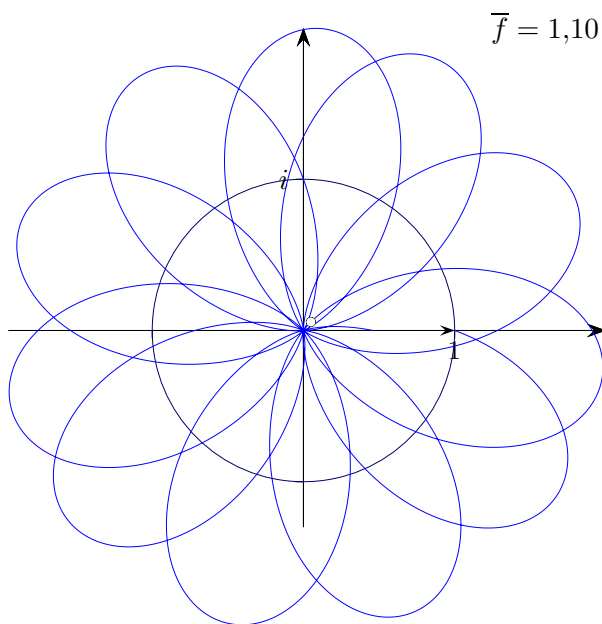
In $G(\omega)$ ist ω die freie Variable, d. h. die Rotationsfrequenz \bar{f} (Umdrehungen pro s) des Zeigers $g(t) e^{-2\pi i \bar{f} t}$ kann frei gewählt werden. Für $\bar{f} = 0,5$ ist es 1 Umdrehung in 2s. Für $g(t)$ liegen in 2s 6 Schwingungen vor. Das erklärt die nebenstehende Grafik.

Das Integral $\frac{1}{4} \int_0^4 g(t) e^{-i\omega t} dt$ gibt einen mittleren Funktionswert (Lage des Schwerpunkts) an. Für $\bar{f} = 0,5$ ist es offensichtlich der Ursprung.



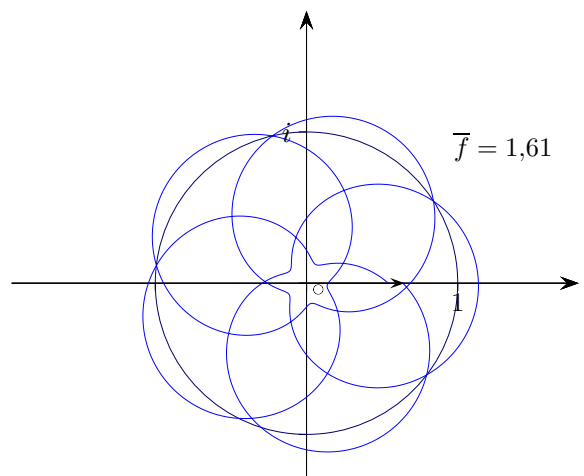
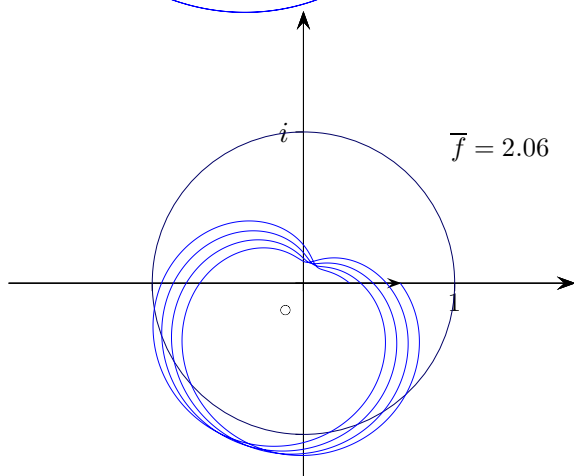
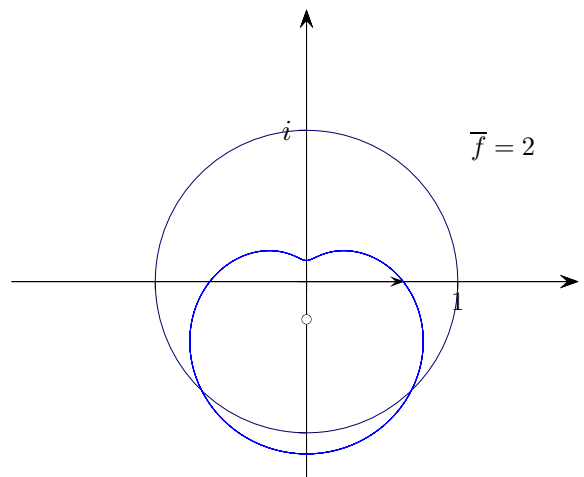
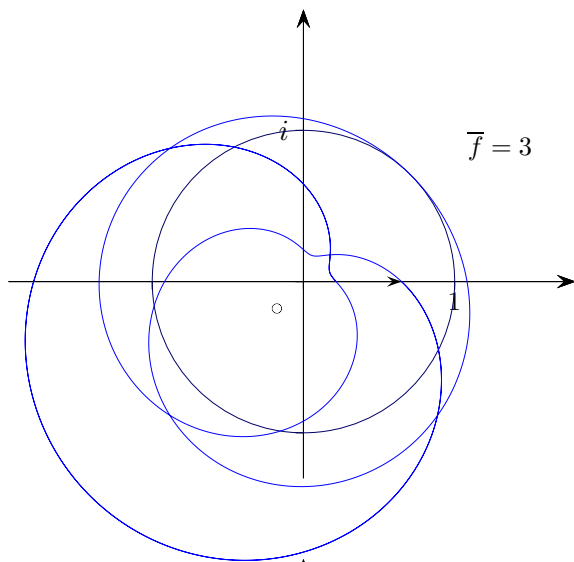
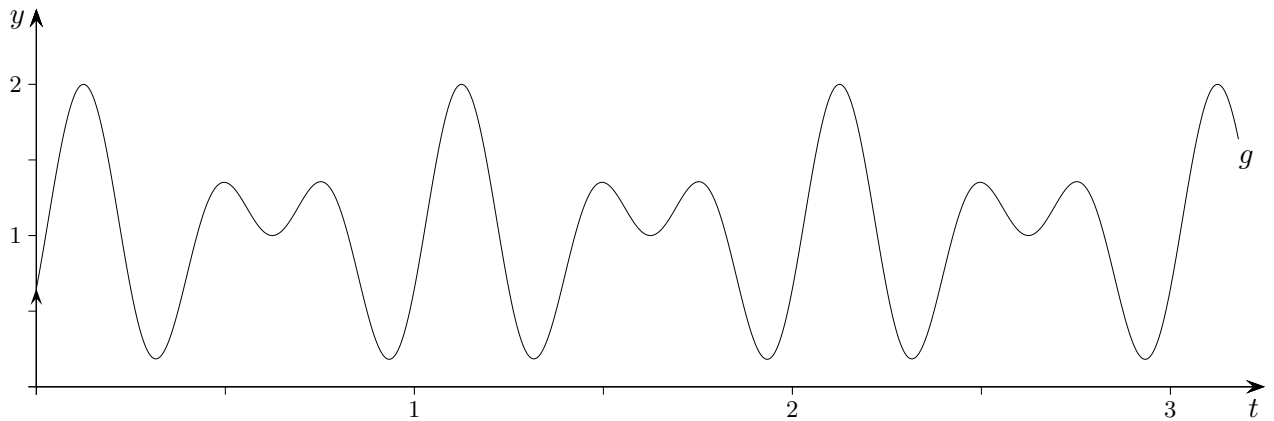


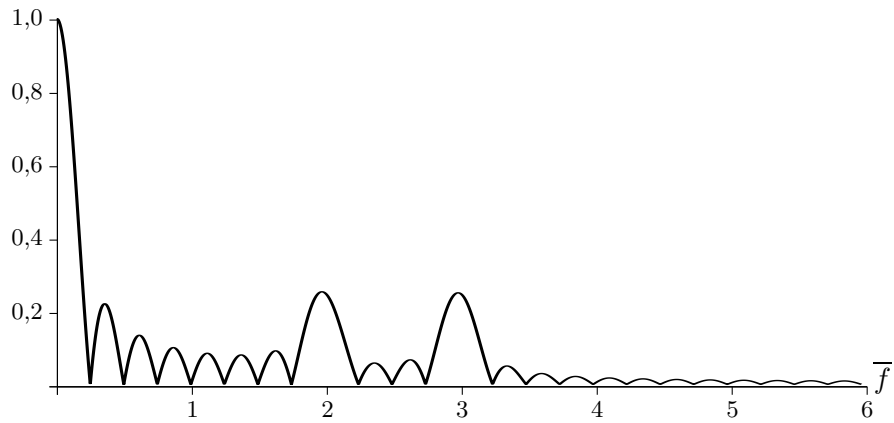
Nur wenn die Frequenzen \bar{f} und f übereinstimmen, weicht der Schwerpunkt deutlich vom Ursprung ab.



Hier wird der Abstand des Schwerpunkts vom Ursprung in Abhängigkeit von \bar{f} dargestellt, siehe: [Video](#)

Untersuchen wir die Situation für $g(t) = 0,5 \sin(3 \cdot 2\pi(t + 0,292)) + 0,5 \sin(2 \cdot 2\pi t) + 1$,
 zusammengesetzt aus Funktionen mit 3 Hz und 2 Hz, für $0 \leq t \leq 4$, 0 sonst.

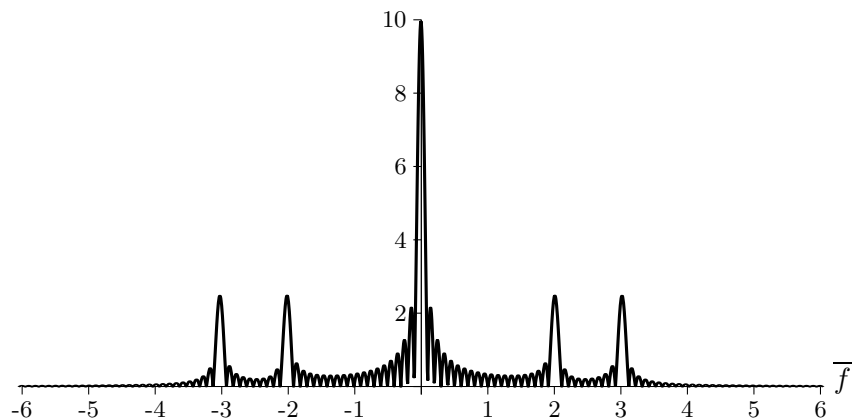




Die ursprünglichen Frequenzen sind hier zu erkennen, $\widehat{f_1 + f_2} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$.

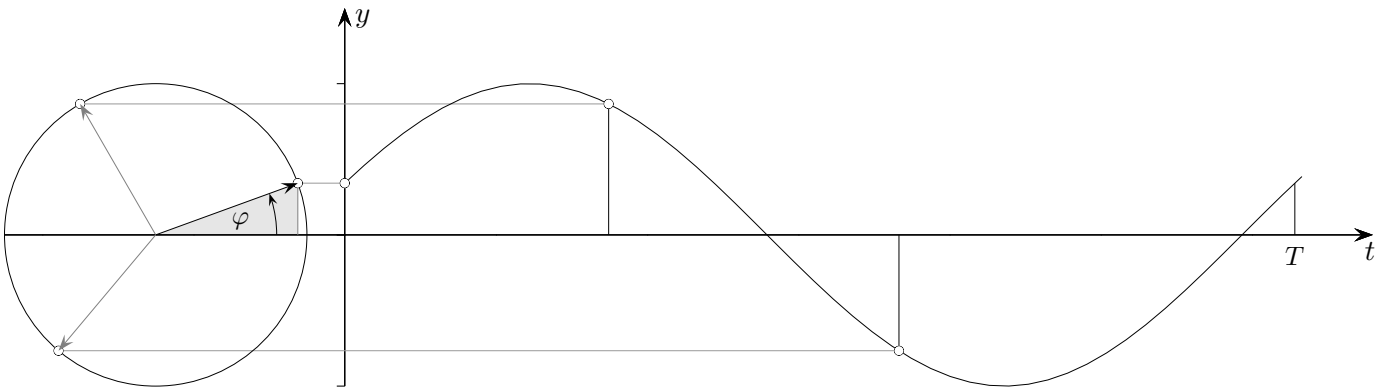
Lassen wir den Faktor vor dem Integral weg und erweitern den Integrationsbereich,

z. B.: $\bar{f} \rightarrow \int_{-5}^5 g(t) e^{-2\pi i \bar{f} t} dt$.



Es verwundert nicht, dass die Fourier-Transformierte (Integrationsbereich ganz \mathbb{R}) einer periodischen Funktion zu einer Summe von Dirac-Funktionen führt.

↑ Amplituden-Phasen-Notation



Die Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

kann als Summe phasenverschobener Kosinusfunktionen dargestellt werden.

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)), \quad A_0 = a_0$$

Jede Frequenz wird dann nur durch eine Fourierkomponente erfasst.

Neben einem Amplitudenspektrum gibt es ein Phasenspektrum.

Für die Umrechnung der Koeffizienten wird ein Additionstheorem benötigt.

$$\cos(kt - \varphi) = \cos(kt) \cos(-\varphi) - \sin(kt) \sin(-\varphi) \quad \Longrightarrow$$

$$A \cos(kt - \varphi) = a \cos(kt) + b \sin(kt)$$

$$a = A \cos(-\varphi) = A \cos(\varphi)$$

$$b = -A \sin(-\varphi) = A \sin(\varphi)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = A \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = A \quad A \geq 0$$

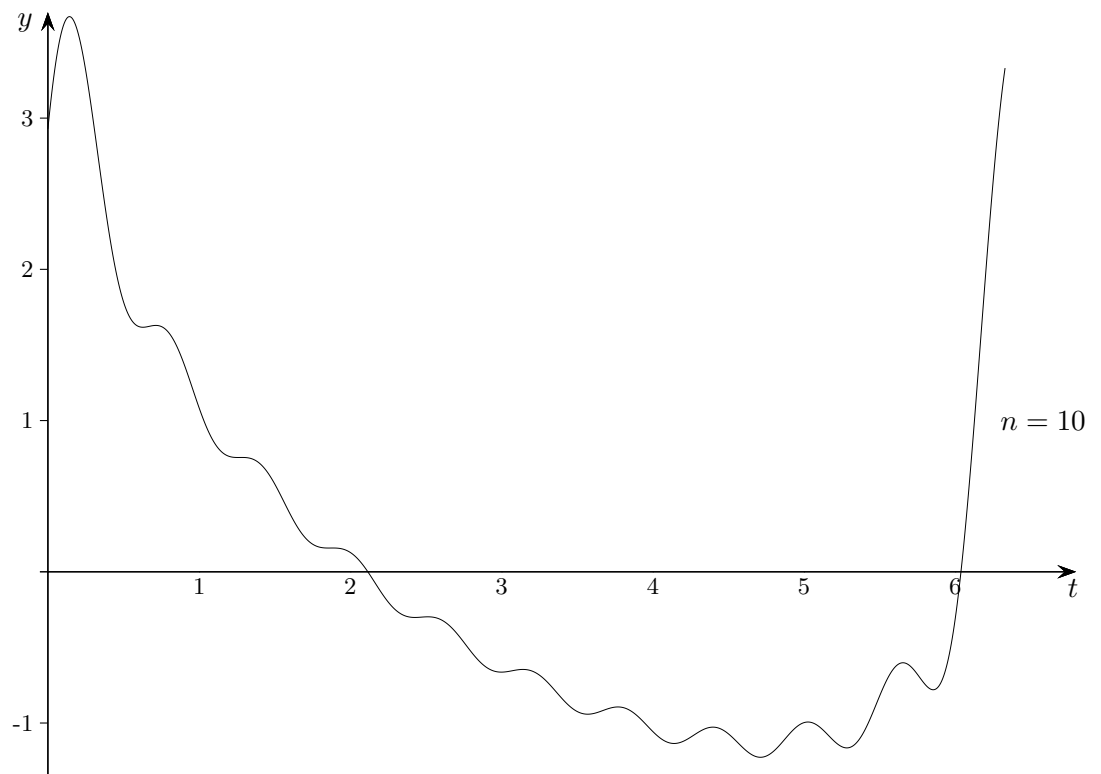
Dann ist $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$$\varphi_n = \arccos \frac{a_n}{A_n} = \arcsin \frac{b_n}{A_n} = \begin{cases} \arctan \frac{b_n}{a_n} & \text{wenn } a_n \geq 0 \\ \arctan \frac{b_n}{a_n} + \pi & \text{wenn } a_n < 0 \end{cases}$$

Wird der Winkel φ_n in Form des Arkustangens angegeben, so ist im Gegensatz zur Berechnung über den Arkuskosinus oder Arkussinus eine Fallunterscheidung erforderlich, da die Tangensfunktion nur π -periodisch ist. φ_n zeigt in den Quadranten, in welchem auch der Punkt (a_n, b_n) liegt.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cos(nt) + \frac{1}{n} \sin(nt) \right]$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{n} \cos(nt - \arccos(1/\sqrt{2})) \right)$$



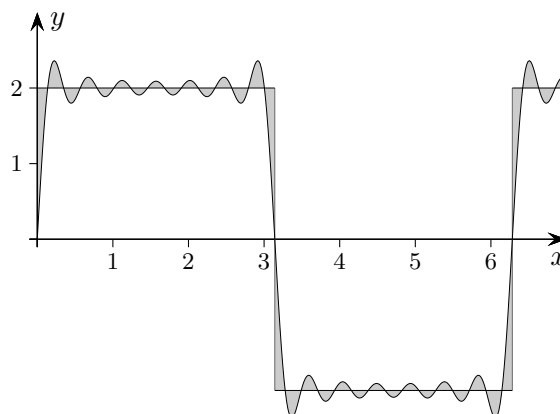
↑ Konvergenz einer Fourier-Reihe

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad \text{für } k \geq 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$$



Zu vermuten ist, dass die Teilsummen $s_n(x)$ gegen $f(x)$ (punktweise) konvergieren, genauer an den Nahtstellen gegen $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, dem Mittelwert des rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerts. Der Graph verläuft an den Nahtstellen mittig.

Zum Nachweis werden zunächst die Integralausdrücke von a_k und b_k in s_n eingesetzt und die Summe zu einem Integral zusammengefasst. Die Integrationsvariable wurde in t umbenannt, um nicht mit x in $s_n(x)$ zu kollidieren.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right]}_{\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2 \sin \frac{t-x}{2}}} dt \quad \text{Additionstheoreme} \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Formel $\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ verwendet.

Den rechten Ausdruck kürzen wir mit $D_n(\alpha)$ ab und erhalten:

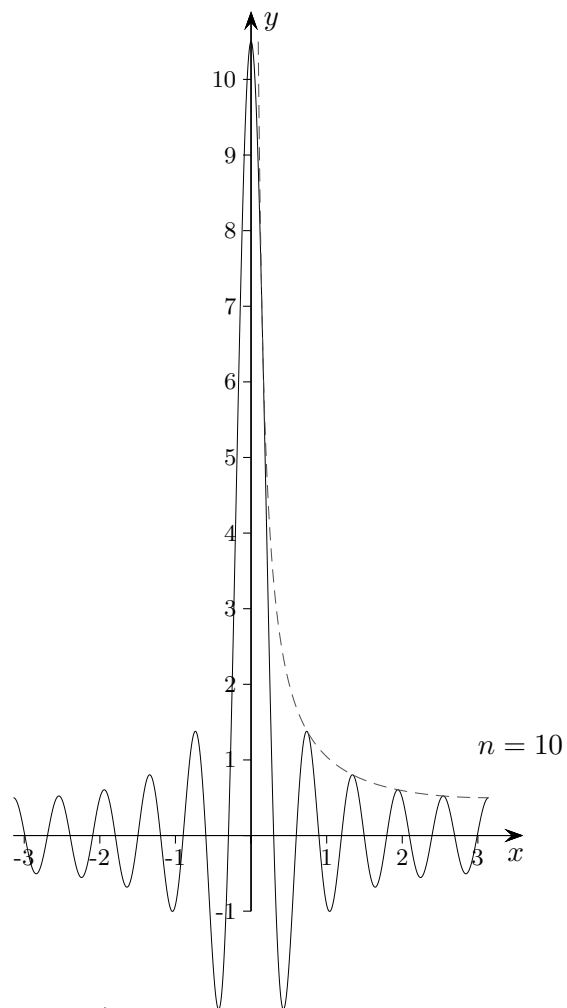
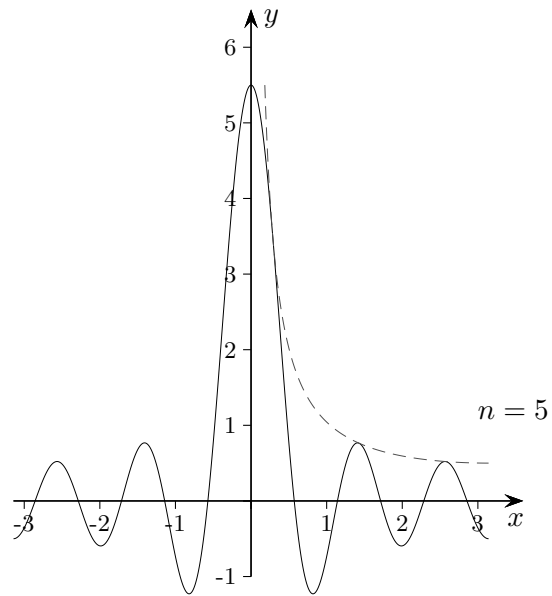
$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

Die Funktion D_n heißt n -ter Dirichlet-Kern. Da f und D_n 2π -periodisch sind, ist

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x) D_n(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt \quad (\text{Substitution } u = t-x)$$

↑

↑ Dirichlet-Kerne



$$D_n(0) := n + \frac{1}{2} \quad (\text{Grenzwert, l'Hospital})$$

↑

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Beweis

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Der Übergang ins Komplexe enthüllt die dahinterliegende Struktur.

$$\frac{1}{2} [1 + 2 \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \dots + 2 \cos n\alpha] = \frac{1}{2} [1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} + e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha} + \dots + e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}]$$

Das ist eine geometrische Reihe mit $2n + 1$ Summanden, die von $e^{-in\alpha}$ bis $e^{in\alpha}$ läuft.

In ihr kommen Potenzen des Faktors $e^{i\alpha}$ vor.

Die Summe einer geometrischen Reihe kennen wir:

$$D_n(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{e^{-in\alpha}(1 - e^{i(2n+1)\alpha})}{1 - e^{i\alpha}} \stackrel{\star}{=} \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1/2)\alpha} - e^{-i(n+1/2)\alpha}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}} = \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Beim Übergang \star wurde mit $-e^{-i\alpha/2}$ erweitert.

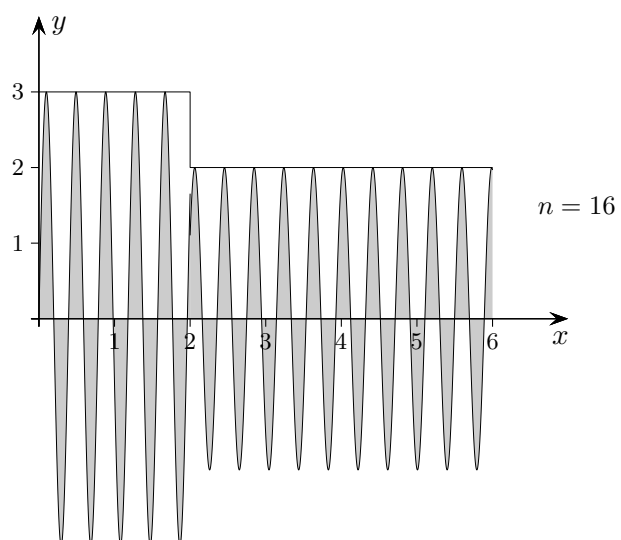
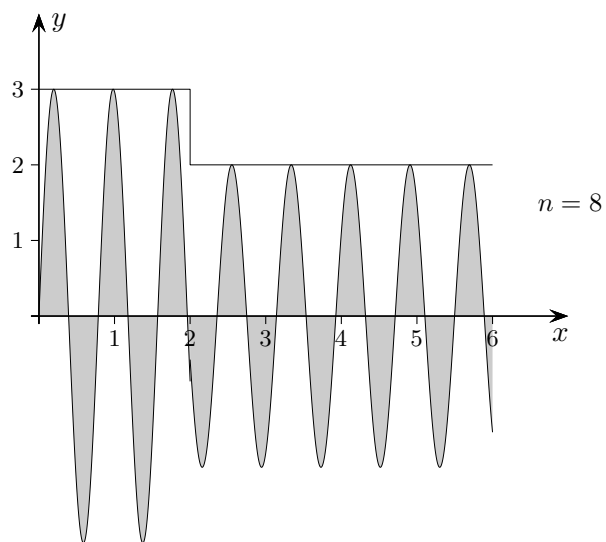
↑ Lemma von Riemann

Für die Untersuchung der Konvergenz einer Fourier-Reihe ist der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F(x) \sin(nx) dx = 0$$

von Bedeutung.

cos wäre auch möglich. Die Fourier-Koeffizienten bilden daher eine Nullfolge.
Der Sachverhalt soll hier für eine Treppenfunktion veranschaulicht werden.



↑ Satz von Dirichlet

Eine Funktion f habe die Periode 2π . Ferner seien f und f' stückweise stetig, d.h. weder f noch f' haben Polstellen und beide haben höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen.

Für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$s_n(x) \rightarrow \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

An den Unstetigkeitsstellen (nur Sprünge sind zugelassen) ist also der Wert der Fourier-Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion f , sonst stimmt der Wert mit $f(x)$ überein.

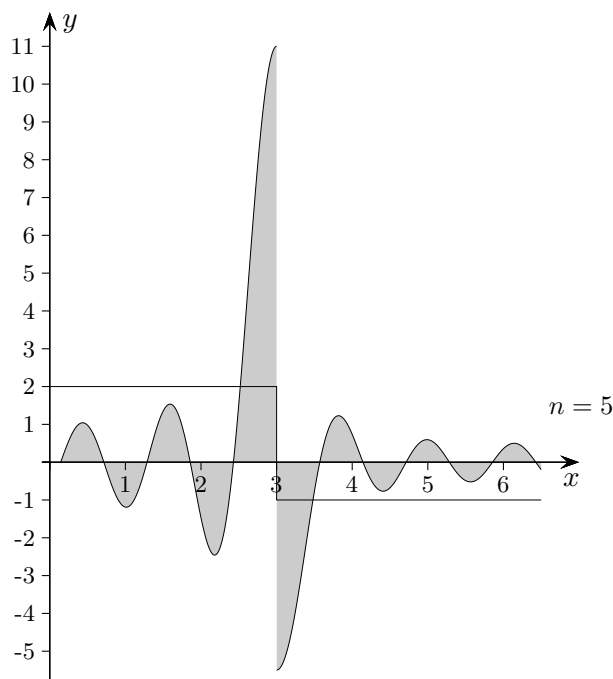
Mit
$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

(D_n Dirichletscher Kern) und dem Lemma von Riemann gelingt der Beweis.

Die Beweisidee ist offensichtlich.

Für f wurde eine Treppenfunktion genommen.

Der Funktionswert von f an der Stelle $x = 3$ ist ohne Belang.



Die Situation erinnert an die Handhabung der Delta-Funktion.

Mit $D_n(t) = \frac{1}{2} + \underbrace{\cos t + \cos 2t \dots}_{\text{Liefert beim Integrieren keinen Beitrag.}}$ ist für alle n unmittelbar ersichtlich: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$

↑

↑ Satz von Dirichlet

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt \quad \longrightarrow \quad \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

Beweis

Sei zunächst $x = 0$.

Wir teilen das Integrationsintervall und zeigen:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) D_n(t) dt \quad \longrightarrow \quad \frac{f(0^+)}{2} \quad \text{und} \quad \star \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) D_n(t) dt \quad \longrightarrow \quad \frac{f(0^-)}{2}$$

Hierzu wenden wir uns der Differenz zu:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) D_n(t) dt - \frac{f(0^+)}{2}$$

$$\text{Mit} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(0^+) D_n(t) dt = \frac{f(0^+)}{2}$$

kann $\frac{f(0^+)}{2}$ unter das Integralzeichen gezogen werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) D_n(t) dt - \frac{f(0^+)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) D_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(0^+) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t) - f(0^+)) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t) - f(0^+)) \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{f(t) - f(0^+)}{2 \sin \frac{t}{2}}}_{F(t)} \sin((2n+1)\frac{t}{2}) dt \quad \longrightarrow \quad 0 \end{aligned}$$

$F(t)$ wird an der Stelle $t = 0$ durch seinen Grenzwert ergänzt. Hier gehen die Eigenschaften von f ein. Jetzt können wir das Riemannsche Lemma anwenden und erhalten das Gewünschte.

\star wird analog gezeigt.

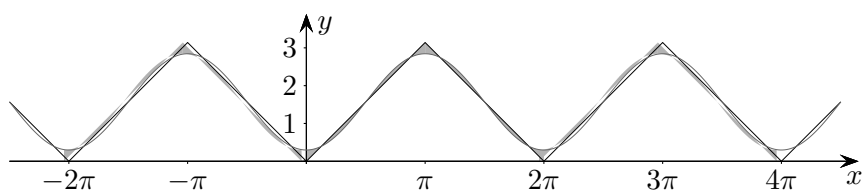
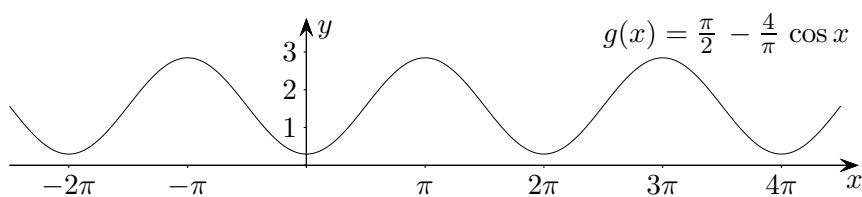
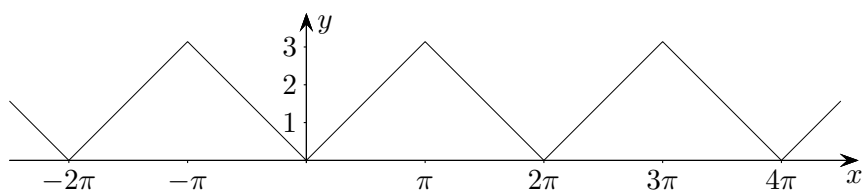
Die Aussage wird auf $x \neq 0$ mit

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt$$

erweitert. $f(t+x)$ wird als Funktion von t betrachtet.

↑

↑ Beispiel

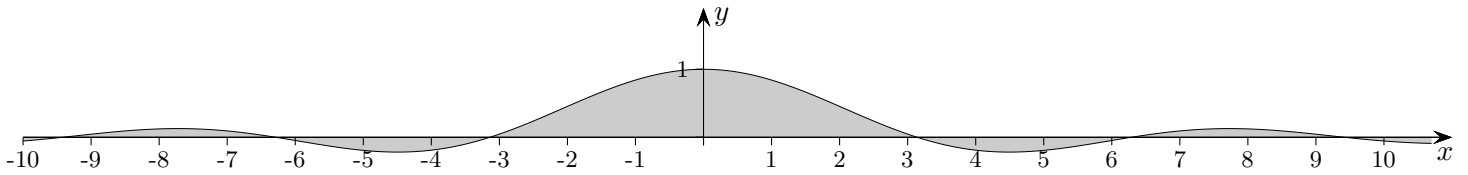


$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

Speziell für $x = 0$ folgt:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$



$$D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$\begin{aligned} \int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) dt \end{aligned}$$

$f(0) := 1$ Grenzwert

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt \longrightarrow \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2}$$

Aus dem Satz von Dirichlet (siehe rechts) folgt, dass das Integral gegen π strebt.

↑ Fejér-Kern

Für eine stetige Funktion f muss die Fourier-Reihe nicht gegen f konvergieren, dies erfolgt nur fast überall (Carlson 1966).

Für eine Zahlenfolge a_0, a_1, \dots, a_n gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1} = a$$

Hiervon gilt nicht die Umkehrung.

Diese Überlegung kann auf die Partialsummenfolge einer Reihe angewendet werden.

Fejér übertrug sie auf Fourier-Reihen

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

und bewies, dass $\sigma_n(x)$

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1} \longrightarrow f(x)$$

gleichmäßig gegen f (stetig und 2π -periodisch vorausgesetzt) konvergiert.

$$s_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_k(t) dt$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \underbrace{\frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1}}_{F_n(t)} dt$$

$$F_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}}$$

wird als Fejér-Kern bezeichnet.

$$D_k(t) = \frac{\sin(2k+1)\frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad k = 0 \dots n$$

Es gilt

$$(2 \sin \frac{t}{2})^2 D_k(t) = 2 \sin(2k+1)\frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} = \cos kt - \cos(k+1)t$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{y+x}{2} \sin \frac{y-x}{2}$$

Aufsummieren liefert

$$(2 \sin \frac{t}{2})^2 F_n(t) = \frac{1}{n+1} (1 - \cos(n+1)t) = \frac{2}{n+1} \sin^2(n+1)\frac{t}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

↑

↑ Fejér-Kern

Die Herleitung von

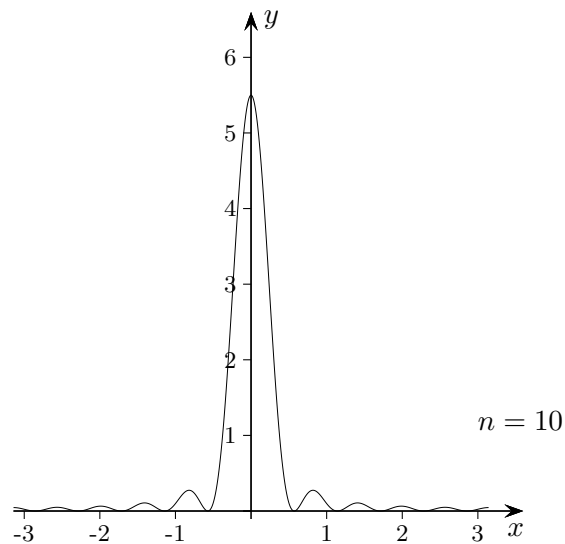
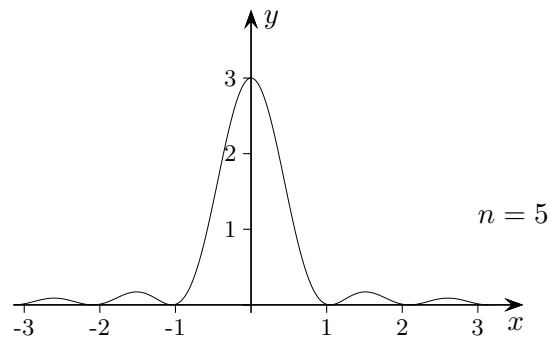
$$F_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}}$$

wird im Komplexen durchsichtiger:

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1) \sin \frac{t}{2}} \left[\underbrace{\sin \frac{t}{2} + \sin \frac{3t}{2} + \dots + \sin \frac{(2n+1)t}{2}}_{\frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}} \right]$$

Zur Ermittlung der Summenformel ist das weitere Vorgehen (siehe Dirichlet-Kern) bekannt.

↑ Fejér-Kerne



$$D_n(0) := \frac{n+1}{2} \quad (\text{Grenzwert})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = 1 \quad \implies \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$$

Die Fejér-Kerne $F_n(t)$ bilden daher eine Delta-Funktionenfolge.

Um die (naheliegende) gleichmäßige Konvergenz von

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) F_n(t) dt \quad \longrightarrow \quad f(x)$$

εn_0 -mäßig nachzuweisen, sind mehrere Abschätzungen erforderlich.

↑

↑ Fourier-Reihe, Herleitung im Komplexen

Die Funktion f habe die Periode T . Der Ansatz lautet: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Wir ermitteln die Koeffizienten c_n .

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \Big| \cdot e^{-im\omega t}, \int_0^T$$

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^T \underbrace{e^{in\omega t} \cdot e^{-im\omega t}}_{e^{i(n-m)\omega t}} dt \quad \int \text{ mit } \sum \text{ vertauscht}$$

2 Fälle sind zu unterscheiden.

$$\int_0^T e^{-i(n-m)\omega t} dt = \left[\frac{e^{ik\omega t}}{ik\omega} \right]_0^T \quad k = n - m, \quad k \neq 0$$

$$= \frac{e^{ik2\pi}}{ik\omega} - \frac{e^0}{ik\omega} = \frac{1}{ik\omega} - \frac{e^0}{ik\omega} = 0, \quad \begin{array}{l} e^{ik2\pi} = 1 \\ \text{anschaulich evident oder} \\ \cos(k2\pi) + i \sin(k2\pi) = 1 \end{array}$$

$$\int_0^T e^{-i(n-m)\omega t} dt = \int_0^T 1 dt = T \quad n = m$$

Somit verschwinden bis auf den Fall $m = n$ alle Summanden, es gilt:

$$\int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = c_n \cdot T \implies c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt.$$

Die Umrechnung zu

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] \quad \text{erfolgt mit:}$$

$$c_n = \begin{cases} a_0/2 & n = 0 \\ (a_n - ib_n)/2 & n > 0 \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2 & n < 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \left. \begin{array}{l} a_0 = 2c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{array} \right\} n > 0$$

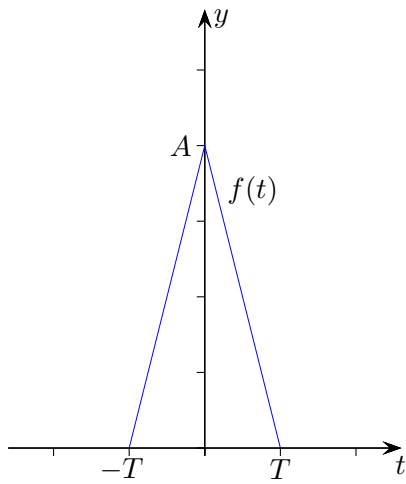
Video

↑ Einige Eigenschaften der Fourier-Transformation

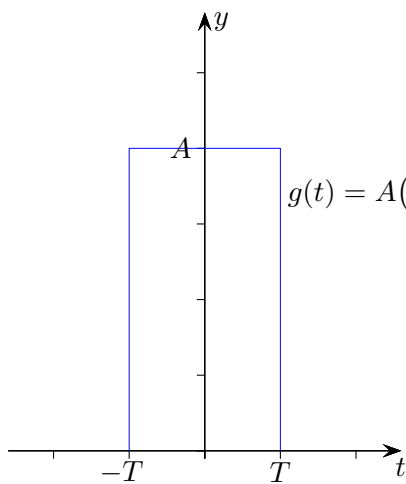
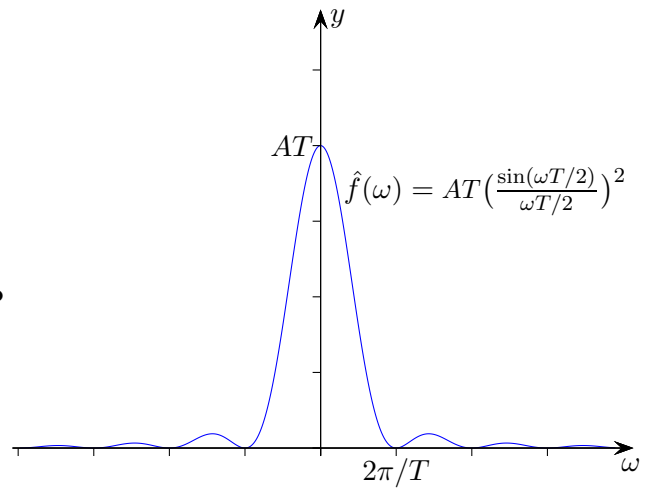
Eine auf einem endlichen Intervall T definierte und periodisch fortgesetzt gedachte Funktion f kann (unter schwachen Voraussetzungen) in eine Fourierreihe entwickelt werden (Spektralanalyse). Die auftretenden Sinus- und Kosinus-Frequenzen können im Komplexen zusammengefasst werden. Das komplexe Frequenz-Spektrum kennzeichnet f in eindeutiger Weise. Ein nicht mehr begrenztes Periodenintervall, $T \rightarrow \infty$, führt zur Fourier-Transformierten von f . Das diskrete Spektrum geht in ein kontinuierliches über.

Damit auch periodische Funktionen Fourier-transformierbar sind - das Problem ist das uneigentliche Integral -, musste der Funktionsbegriff um die **Dirac-Funktion** (δ -Funktion) erweitert werden. Für die **Signalverarbeitung** (z.B.) ist das von großer Bedeutung.

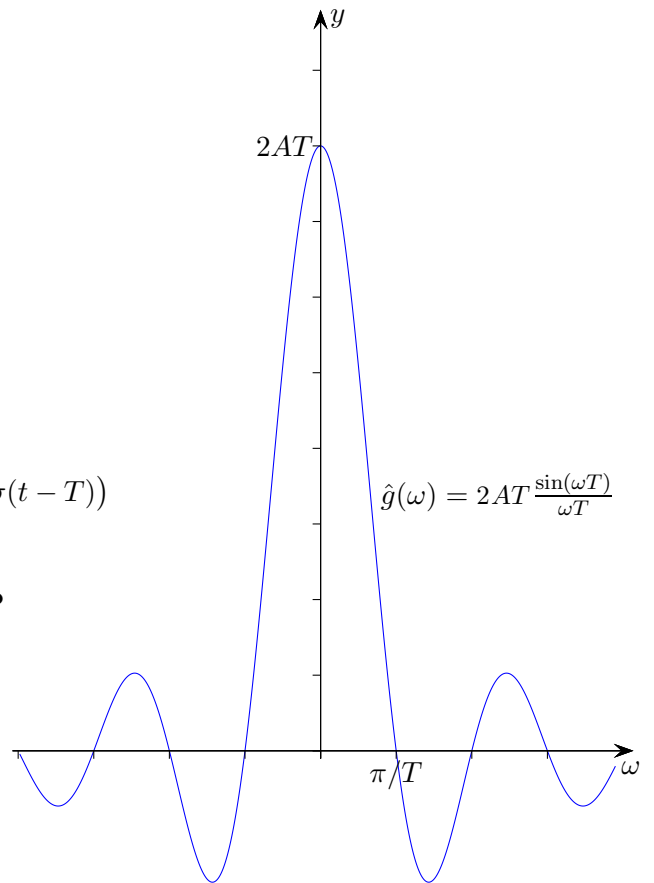
1. $f(t) \circ \bullet \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$
2. $\cos \omega_0 t \circ \bullet \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$
3. $\sin \omega_0 t \circ \bullet i\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$
4. $e^{i\omega_0 t} \circ \bullet 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
6. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \circ \bullet 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$ Fourier-Transformierte einer Fourier-Reihe
7. $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \circ \bullet \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
8. $e^{i\omega_0 t} f(t) \circ \bullet \hat{f}(\omega - \omega_0)$
9. $f(t - a) \circ \bullet e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega)$
10. $f(t) \cdot g(t) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)$
11. $f(at) \circ \bullet \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
12. $f'(t) \circ \bullet i\omega \hat{f}(\omega)$
13. $f^{(n)}(t) \circ \bullet (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$
14. $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{i\omega} \hat{f}(\omega) + \pi\delta(\omega) \cdot \hat{f}(0)$
15. $\delta(t) \circ \bullet 1$
16. $\sigma(t) \circ \bullet \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$



○●



○●



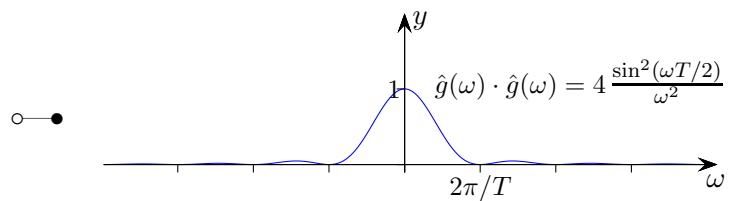
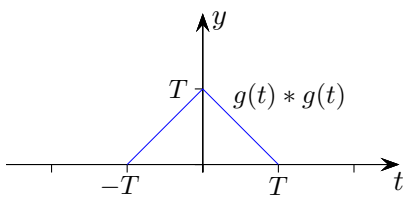
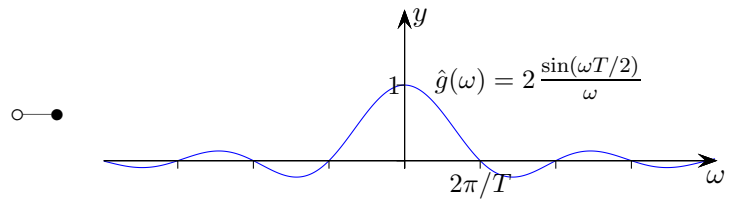
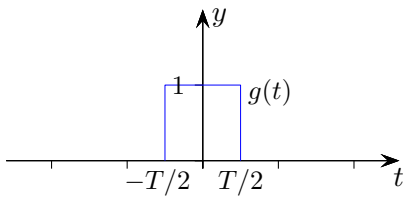
$$\sigma(t \pm T) \quad \circ \bullet \quad \frac{e^{\pm i\omega T}}{i\omega} + \underbrace{\pi\delta(\omega)e^{\pm i\omega T}}_{\pi\delta(\omega)e^0 = \pi\delta(\omega)}$$

$$g(t) \quad \circ \bullet \quad A \frac{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}{i\omega} = 2AT \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

9., 16., $\delta(\omega)$ nur bei $\omega = 0$ ungleich 0

δ -Funktionen heben sich auf.

↑ Faltung



Diskrete Fourier-Transformation (DFT), Fast Fourier-Transformation (FFT)
Signalverarbeitung
Startseite