g) $\dfrac{1+\text{ctg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}{\text{ctg}\alpha-\text{tg}\beta}$ *[Soluc: tg(α+β)]*

h) $\dfrac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$ *(Soluc: cos x)*

55. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\text{sen}^2\alpha+\cos 2\alpha}=2\,\text{tg}^2\alpha$

b) sen 2α cos α **–** sen α cos 2α = sen α

c) cos α cos (α–β) + sen α sen (α–β)=cos β

d) $\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

e) $\sec^2 A-\text{tg}^2 A=1$

f) $\text{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{\text{sen}A}{1+\cos A}=\dfrac{1-\cos A}{\text{sen}A}=\text{cosec}A-\text{ctg}A$

g) $\dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha-\text{sen}\,2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,2\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\text{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$

h) $\text{sen}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\text{sen}^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

i) $\text{sen}^2 A=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2A$

j) $\dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\text{tg}\,2x}=\cos x-\text{sen}\,x\cdot\text{tg}\,x$

k) $\dfrac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}=\text{sen}\,x$

l) $\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}=\sec x+\text{tg}\,x$

m) $\dfrac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}=\text{tg}^2 x$

56. Demostrar las siguientes fórmulas, llamadas **transformaciones de productos en sumas**:

$$\text{sen}\,x\;\text{sen}\,y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x\;\cos y=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\text{sen}\,x\;\cos y=\frac{\text{sen}(x-y)+\text{sen}(x+y)}{2}$$

Ecuaciones trigonométricas:

57. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $\text{sen}\,x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *(Sol: x=60º+k·360º; x=120º+k·360º)*

b) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *(Sol: x=135º+k·360º; x=225º+k·360º)*

c) $\text{ctg}\,x=-\sqrt{3}$ *(Sol: x=150º+k·180º)*

d) $\text{sen}\,x=\dfrac{1}{3}$ *(x≅19º28'16''+k·360º; x≅160º31'44''+k·360º)*

e) $\cos x=-\dfrac{4}{5}$ *(x≅143º7'48''+k·360º; x≅216º52'12''+k·360º)*

f) $\text{sen}\,x=0$ *(Sol: x=k·180º)*

g) $\cos x=-1$ *(Sol: x=(2k+1)·180º)*

h) $\text{cosec}\,x=-2$ *(Sol: x=210º+k·360º; x=330º+k·360º)*

i) $\sec x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ *(Sol: x=150º+k·360º; x=210º+k·360º)*

j) $\text{tg}\,x=\sqrt{3}$ *(Sol: x=60º+k·180º)*

k) $\text{cosec}\,x=\dfrac{1}{2}$ *(Sol: ∄ soluc)*

l) $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ *(Sol: Se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$)*

m) $\cos 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *(Sol: x=10º+k·120º; x=110º+k·120º)*

n) $\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *[Sol: x=2kπ; x=(4k+1)·π/2]*

58. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas más elaboradas:

a) $\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2}$ *(Sol: x=45º+k·360º)*

b) $\text{sen}\, x - 2\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$ *(Sol: 30º, 150º, ≅311º24'35'' y ≅228º35'25'')*

c) $\text{sen}\, x \cos x = \dfrac{1}{2}$ *(Sol: x=45º+k·180º)*

d) sen 2x=cos x *(Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º; x=90º+k·180º)*

e) $\sqrt{3}\ \text{sen}\, x + \cos x = 1$ *(Sol: x=k·360º; x=120º+k·360º)*

f) $2\cos^2 x - \text{sen}^2 x + 1 = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

g) $\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=90º+k·360º)*

h) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º; x=30º+k·360º; x=330º+k·360º)*

i) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

j) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0$ *(Sol: x=45º+k·90º)*

k) $2\cos^2 x + \text{sen}\, x = 1$ *(Sol: x=90º+k·360º; x=210º+k·360º; x=330º+k·360º)*

l) $3\,\text{tg}^2 x - \sqrt{3}\ \text{tg}\, x = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=30º+k·360º; x=210º+k·360º)*

m) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\ \text{sen}\, x = 0$ *(Sol: x=π/4+k·π)*

n) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}$ *(Sol: x=60º+k·360º; x=300º+k·360º)*

o) $\text{sen}2x - 2\cos^2 x = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º; x=45º+k·180º)*

p) cos2x−3senx+1=0 *(Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º)*

q) $4\text{sen}^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=45º+k·90º)*

r) $4\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ *(Sol: x=36º52'11,6''+k·180º; x=135º+k·180º)*

s) $\cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x = \dfrac{1}{2}$ *(Sol: x=90º+k·180º)*

t) $\text{tg}^2 \dfrac{x}{2} + 1 = \cos x$ *(Sol: x=k·360º)*

u) $2\,\text{sen}^2 \dfrac{x}{2} + \cos 2x = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º; x=60º+k·360º; x=300º+k·360º)*

v) cos2x+3senx=2

w) tg2x tgx=1

x) $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$

y) 2sen x=tg 2x

z) $\sqrt{3}\ \text{sen}\dfrac{x}{2} + \cos x = 1$

α) $\text{sen}2x \cos x = 6\text{sen}^3 x$

β) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + \text{tg}\, x = 1$

γ) $\text{sen}\, x - \sqrt{3}\cos x = 2$ *(Sol: x=150º+k·360º)*

59. Resolver las siguientes ecuaciones, transformando las sumas y diferencias en productos:

a) sen3x−senx=cos2x

b) $\dfrac{\text{sen}\, 5x + \text{sen}\, 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

c) $\dfrac{\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

d) sen3x−cos3x=senx−cosx

Resolución de triángulos oblicuángulos:

60. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

a) a=6 m, B=45º, C=105º *(Soluc: A=30º, b≅8,49 m, c≅11,59 m, S_{ABC} ≅24,60 m^2)*

b) a=10 dam, b=7 dam, C=30º *(Soluc: c≅5,27 dam, B≅41º 38', A≅108º 22')*

c) b=35,42 dm, A=49º 38', B=70º 21' *(Soluc: C=60º 1', a≅28,66 dm, c≅32,58 dm, S_{ABC} ≅439,94 dm^2)*

d) a=13 m, b=14 m, c=15 m *(Soluc: A≅53º 7' 48'', B≅59º 29' 23'', C≅67º 22' 48'', S_{ABC} ≅84m^2)*

* **e)** a=42, b=32, B=40º 32' *(Soluc: A_1≅58º 32', C_1≅80º 56', c_1≅48,62; S_{ABC} ≅663,55*
A_2≅121º 27', C_2≅18º, c_2≅15,22; S_{ABC} ≅207,72)

f) a=15, b=22, c=17 *(Soluc: A≅42º 54', B≅86º 38', C≅50º 28')*

g) a=10 mm, b=7 mm, C=60º *(Soluc: c≅8,89 mm, A≅76º 59' 46'', B≅43º 0' 14'', S_{ABC} ≅30,31mm^2)*

h) a=10, b=9, c=7 *(Soluc: A≅76º 13', B≅60º 57, C≅42º 50')*

* **i)** a=60 cm, b=40 cm, A=42º *(Soluc: B≅26º 30', c≅83,43 cm, C≅111º 30', S_{ABC} ≅116,5 cm^2)*

* **j)** a=40 cm, b=60 cm, A=72º *(Soluc: ∄ soluc)*

* **k)** a=50, b=60, A=42º *(Soluc: B_1≅53º 25', C_1≅84º 35', c_1≅74,39*
B_2≅126º 35', C_2≅11º 25', c_2≅14,39)

l) A=30º, B=45º, b=$\sqrt{2}$ m *(Soluc: C=105º, a=1 m, c≅1,93 m, S_{ABC} ≅0,68 m^2)*

m) b=3 hm, c=2 hm, A=60º *(Soluc: a=$\sqrt{7}$ hm, B≅79º, C≅40º 54', S_{ABC} =3$\sqrt{3}$/2 hm^2)*

n) A=30º, b=$\sqrt{3}$, c=1

* **o)** a=4, b=5, B=30º

p) a=1792, b=4231, c=3164

* **q)** a=12 hm, b=57 hm, A=150º *(Soluc: ∄ soluc)*

r) a=72, b=57, C=75º 47'

s) c=3,78, A=105º, B=38º 47'

* **t)** a=40, b=60, A=12º

* **u)** a=60, b=40, A=82º

v) a=8 m, B=30º, C=105º *(Soluc: b≅5,66 m, c≅10,93 m, S_{ABC} ≅21,86 m^2)*

w) A=60º, B=75º, c=$\sqrt{2}$ m

x) a=4 km, B=45º, C=60º

y) a=4 mm, b=3 mm, c=6 mm

z) a=1 cm, c=2 cm, B=60º

α) a=5 dam, b=3 dam, c=4 dam

* **β)** b=10 dm, c=9 dm, C=45º

γ) A=30º, b=10 m, C=75º *(Soluc: B=75º, a≅5,18 m, c=10 m, S_{ABC}=25   m^2)*

61. Resolver el triángulo ABC sabiendo que su perímetro es 24 cm, es rectángulo en A y sen B=3/5
(Soluc: a=10 cm, b=6 cm, c=8 cm)

62. Calcular el área de un triángulo de datos a=8 m, B=30º, C=45º

63. En un paralelogramo ABCD el lado AB mide 6 cm, el AD 8 cm, y el ángulo A=30º. Hallar sus diagonales.

64. Hallar los lados de un triángulo sabiendo que su área mide 18 cm^2 y dos de sus ángulos A=30º y B=45º
(Soluc: a≅5,13 cm, b≅7,26 cm, c≅9,92 cm)

65. TEORÍA: Demostrar, utilizando el teorema del coseno, que el triángulo de lados 9, 12 y 15 es rectángulo.

*** 66.** Uno de los lados de un triángulo es doble que el otro, y el ángulo comprendido vale 60º. Hallar los otros dos ángulos. *(Soluc: 30º y 60º)*

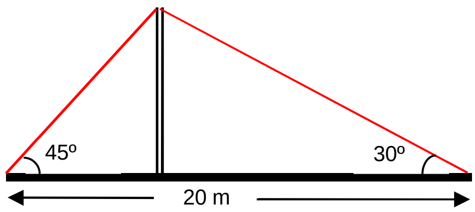
Problemas de planteamiento:

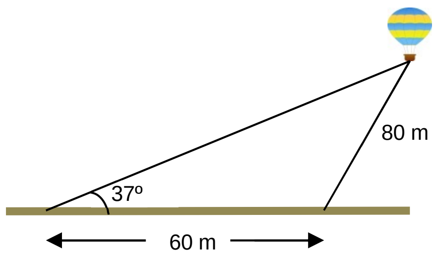
67. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30º. A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45º. Calcular la altura de la montaña. *(Soluc: ≅136,60 m)*

68. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20º y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120º. ¿Cuál es la anchura del río? *(Soluc: ≅53,21 m)*

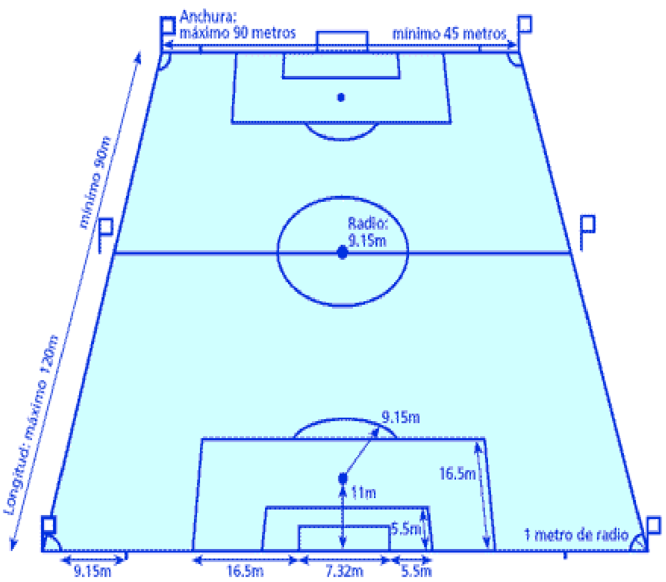
69. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuánto distan A y C? *(Soluc: ≅13 km 77 m)*

70. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil? *(Sol: cable=25 m; mástil≅7,32 m)*





71. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. *(Sol: ≅71,80 m y 119,31 m, respectivamente)*



72. Se lanza una falta desde un punto situado a 25 m y 28 m de ambos postes de una portería reglamentaria de fútbol, es decir, 7,32 m de longitud ¿Bajo qué ángulo se verá la portería desde dicho punto? (Hacer un dibujo previo que explique la situación). ¿A qué distancia se encuentra del centro de la portería? *(Sol: ≅14º 29' 54")*

Si el punto estuviera a 26 y 27 m, ¿tendría más ángulo de tiro? La distancia, ¿sería menor?

73. Desde la puerta de una casa, A, se ve el cine B, que está a 120 m, y el quiosco C, que está a 85 m, bajo un ángulo $B\hat{A}C = 40º$ ¿Qué distancia hay entre el