Ecuaciones trigonométricas resueltas

1. Resuelve: $sen^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

Despejando el coseno de x de la primera relación fundamental, se tiene: $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$

Sustituyendo en la ecuación original: $sen^2 x - 1 + sen^2 x = \frac{1}{2}$; operando:

$$2\text{sen}^2 x - 1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad 2\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} + 1 \quad ; \quad sen^2 x = \frac{3}{4} \quad ; \quad sen\, x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$x = arc\, sen \frac{\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 120^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$x = arc\, sen \frac{-\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} 240^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

es decir, $x = \begin{cases} 60^\circ + 180^\circ \cdot k \\ 120^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$

Otra manera de hacerlo más corta:

La ecuación original es el desarrollo del coseno del ángulo doble salvo un signo, por lo que multiplicamos por (-1) en ambos lados de la ecuación:

$$sen^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos^2 x - sen^2 x = \frac{-1}{2} \quad ; \quad \cos(2x) = \frac{-1}{2}$$

$$2x = arc\cos \frac{-1}{2} = \begin{cases} 120^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ ; por tanto } \quad x = \begin{cases} 60^\circ + 180^\circ \cdot k \\ 120^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$$

2. Calcular $sen\, 3x$ en función de $sen\, x$

Utilizamos la fórmula de la suma de dos ángulos:

$sen(2x) = sen(x+x) = sen\, x \cdot \cos x + \cos x \cdot sen\, x = 2\text{sen}\, x \cdot \cos x$ y

$sen(3x) = sen(2x+x) = sen(2x) \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot sen\, x$ por lo que también necesitaremos la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$\cos(2x) = \cos x \cdot \cos x - sen\, x \cdot sen\, x = \cos^2 x - sen^2 x = (1 - sen^2 x) - sen^2 x = 1 - 2\text{sen}^2 x$$

Sustituyendo estas igualdades:

$$sen(3x) = sen(2x+x) = sen(2x) \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot sen\, x = \underbrace{2\text{sen}\, x \cdot \cos x}_{sen(2x)} \cdot \cos x + \underbrace{(1 - 2\text{sen}^2 x)}_{\cos(2x)} \cdot sen\, x =$$

$$2\text{sen}\, x \cdot \cos^2 x + sen\, x - 2\text{sen}^3 x = 2\text{sen}\, x \cdot (1 - sen^2 x) + sen\, x - 2\text{sen}^3 x =$$

$$= 2\text{sen}\, x - 2\text{sen}^3 x + sen\, x - 2\text{sen}^3 x = 3\, sen\, x - 4\, sen^3 x$$

3. Resuelve: $\cos 8x + \cos 6x = 2\cos 210^\circ \cdot \cos x$

Ya que en el primer miembro hay una suma de dos cosenos, utilizaremos su fórmula para convertirla en productos: $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$. Sea A=8x y B=6x:

$2\cos 7x\cdot\cos x = 2\cos 210^\circ\cdot\cos x$; simplificando: $\cos 7x\cdot\cos x = \cos 210^\circ\cdot\cos x$

Nota: Sólo simplificamos el 2 y no el cos x para no perder una posible solución, en lugar de eso, llevamos todo a un miembro y factorizamos:

$\cos x(\cos 7x - \cos 210^\circ) = 0$;

Primera solución: $\cos x = 0$; $x = arc\cos 0 = \begin{cases} 90^\circ + 360^\circ\cdot k \\ 270^\circ + 360^\circ\cdot k \end{cases}$, *es decir* $x = 90^\circ + 180^\circ\cdot k$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$

Segunda solución: $\cos 7x - \cos 210^\circ = 0$; $7x = 210^\circ$; $x = 30^\circ$

4. Simplifica: $\frac{sen\, 2x}{1+\cos 2x}$

Sustituimos las fórmulas de sen y del coseno del ángulo doble en la ecuación:

$$\frac{sen\,2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\text{sen}\,x\cdot\cos x}{1+\cos^2 x - sen^2 x} = \frac{2\text{sen}\,x\cdot\cos x}{\underbrace{1-sen^2 x}_{\cos^2 x} + \cos^2 x} = \frac{2\text{sen}\,x\cdot\cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{2\text{sen}\,x\cdot\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{sen\,x}{\cos x} = tg\,x$$

5. Resuelve: $sen\,2x = \cos 3x$

Escribimos $\cos 3x$ de forma que aparezcan únicamente senos y cosenos de x:

$\cos(3x) = \cos(2x + x) =$;

$= \cos(2x)\cdot\cos x - sen(2x)\cdot sen\,x =$

$= (\cos^2 x - sen^2 x)\cos x - (2\text{sen}\,x\cdot\cos x)\,sen\,x =$

$= (1 - sen^2 x - sen^2 x)\cos x - 2\text{sen}^2 x\cdot\cos x =$

$= (1 - 2\text{sen}^2 x)\cos x - 2\text{sen}^2 x\cdot\cos x =$

$= \cos x - 2\text{sen}^2 x\cdot\cos x - 2\text{sen}^2 x\cdot\cos x =$

$= \cos x - 4\text{sen}^2 x\cdot\cos x \quad (1)$

En la primera parte de la ecuación tenemos que $sen(2x) = 2\text{sen}\,x\cdot\cos x \quad (2)$

Igualando las expresiones (1) y (2):

$2\text{sen}\, x\cdot\cos x=\cos x-4\text{sen}^2 x\cdot\cos x$ De esta expresión se puede sacar factor común cos x y simplificar:

$2\text{sen}\, x=1-4\text{sen}^2 x$; ecuación ya sencilla de resolver ya que es de orden 2:
$4\text{sen}^2 x+2\text{sen}\, x-1=0$; hacemos un cambio de variable $sen\, x=t$:

$4\text{t}^2+2\text{t}-1=0$; Soluciones: $t=sen\, x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$$x=arc\, sen\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\begin{cases}18º+360º\cdot k\\162º+360º\cdot k\end{cases}$$

$$x=arc\, sen\frac{-1-\sqrt{5}}{4}=\begin{cases}306º+360º\cdot k\\234º+360º\cdot k\end{cases}$$

Pero, a la hora de comprobar las soluciones, y mirando la ecuación original, ambas razones deben tener el mismo signo, cosa que ocurre únicamente en los cuadrantes I y III, por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$x=\begin{cases}18º+360º\cdot k\\234º+360º\cdot k\end{cases}$$

6. Resuelve: $2\text{sen}(3\text{x})-1=0$

Sólo hay un ángulo y sólo una razón trigonométrica, por lo que, en lugar de sustituir, despejamos:

$sen(3\text{x})=\frac{1}{2}$; por tanto, $3\text{x}=arc\, sen\frac{1}{2}=\begin{cases}3\text{x}=30º\rightarrow x=10º+360º\cdot k\\3\text{x}=150º\rightarrow x=50º+360º\cdot k\end{cases}$

7. Resuelve: $\frac{sen(3\text{x})}{sen\, x}-\frac{\cos(3\text{x})}{\cos x}=2$

Expresamos $sen(3\text{x})$ como $sen(2\text{x}+x)$ y $\cos(3\text{x})$ como $\cos(2\text{x}+x)$ y utilizamos las fórmulas del seno y coseno de la suma de dos ángulos:

$$\frac{sen(2\text{x}+x)}{sen\, x}-\frac{\cos(2\text{x}+x)}{\cos x}=2\,;$$

$$\frac{sen(2\text{x})\cdot\cos x+\cos(2\text{x})\cdot sen\, x}{sen\, x}-\frac{\cos(2\text{x})\cdot\cos x-sen(2\text{x})\cdot sen\, x}{\cos x}=2\,;$$

Desarrollamos ahora el seno y el coseno del ángulo doble:

$$\frac{(2\cdot sen\, x\cdot\cos x)\cdot\cos x+(\cos^2 x-sen^2 x)\cdot sen\, x}{sen\, x}-\frac{(\cos^2 x-sen^2 x)\cdot\cos x-(2\cdot sen\, x\cdot\cos x)\cdot sen\, x}{\cos x}=2\,;$$

Simplificamos: $2\cdot\cos^2 x+\cos^2 x-sen^2 x-\cos^2 x+sen^2 x+2\cdot sen^2 x=2\,;$

Agrupando: $2\cdot\cos^2 x+2\cdot sen^2 x=2$; es decir, $sen^2 x+\cos^2 x=1$

Esta expresión es la relación fundamental I, por lo que se cumple para cualquier ángulo.

8. Resuelve: $2\cdot sen^2 x+2\cdot sen\,x\cdot\cos x-1=0$

En esta ecuación es mejor operar al revés, es decir, el segundo término lo reconocemos como el sen del ángulo doble, ya que $sen(2x)=2\cdot sen\,x\cdot\cos x$, y el primer y tercer término es el desarrollo del coseno del ángulo doble, ya que $\cos(2x)=\cos^2 x-sen^2 x=1-sen^2 x-sen^2 x=1-2\,sen^2 x$

Por tanto, la ecuación original puede ponerse como: $sen(2x)-\cos(2x)=0$; es decir:

$sen(2x)=\cos(2x)$; dividiendo entre $\cos(2x)$ tenemos: $tg(2x)=1$;

$$2x=arc\,tg\,1=\begin{cases}2x=45^\circ\rightarrow x=22'5^\circ+360^\circ\cdot k\\2x=225^\circ\rightarrow x=112'5^\circ+360^\circ\cdot k\end{cases}$$

9. Sabiendo que $sen\,\alpha=\frac{4}{5}$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula $sen\,4\alpha$ (usa la calculadora sólo para la comprobación final)

Atendiendo a la definición del seno de un ángulo, 4 será el cateto opuesto al ángulo, y 5 la hipotenusa. Por el Teorema de Pitágoras, (y porque se trata de una terna pitagórica) el cateto adjunto es 3, por tanto $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Ahora usamos la fórmula del seno del ángulo doble:

$$sen(2\alpha)=2\cdot sen\,\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$$

De nuevo, por el Teorema de Pitágoras calculamos el cateto contiguo de un triángulo que tiene como cateto opuesto 24 y como hipotenusa 25:

$$cateto\,contiguo=\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{49}=7$$

Por tanto, $\cos(2\alpha)=\frac{7}{25}$. Y volvemos a usar la fórmula del ángulo doble:

$$sen(4\alpha)=sen(2\alpha+2\alpha)=2\,sen(2\alpha)\cdot\cos(2\alpha)=2\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{7}{25}=\frac{336}{625}$$

Comprobación: Del enunciado averiguamos que $\alpha=53'13^\circ=53^\circ\ 7'\ 48{,}37''$ Multiplicándolo por 4, obtenemos el ángulo: $4\alpha=212'52^\circ=212^\circ\ 31'\ 13{,}47''$, que es un ángulo del III cuadrante. Haciendo la reducción al I cuadrante (porque será el resultado que obtenga con la calculadora), obtenemos un nuevo ángulo $\beta=32'52^\circ=32^\circ\ 31'\ 13{,}47''$.

Por otro lado, con la solución del problema, $4\alpha=arc\,sen\frac{336}{625}$. Se comprueba que $4\alpha=\beta$

10. Resuelve: $sen\, x + sen(3x) = sen(2x) + sen(4x)$

Utilizando las fórmulas del angulo doble y de suma de dos ángulos, transformamos los términos de la ecuación de manera que sólo aparezcan senos y cosenos de ángulos simples:

$$sen(2x) = 2\, sen\, x \cdot \cos x$$

$$sen(3x) = sen(2x + x) = sen(2x) \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot sen\, x = 2sen\, x \cdot \cos^2 x + \cos(2x) \cdot sen\, x$$

$$sen(4x) = sen(2x + 2x) = 2\, sen(2x) \cdot \cos(2x) = 4\, sen\, x \cdot \cos x \cdot \cos(2x)$$

Nota: Para no hacer la ecuación demasiado larga y compleja, optamos por dejar, de momento, los cosenos de 2x sin sustituir. Lo haremos más adelante.

El objetivo, en este tipo de ecuaciones, es poder factorizar.

En la ecuación original, sustituimos estos valores, pasamos todo a un miembro y sacamos factor común $sen\, x$

$$sen\, x + \underbrace{2\, sen\, x \cdot \cos^2 x + \cos(2x) \cdot sen\, x}_{sen(3x)} - \underbrace{2\, sen\, x \cdot \cos x}_{sen(2x)} - \underbrace{4\, sen\, x \cdot \cos x \cdot \cos(2x)}_{sen(4x)} = 0$$

Observamos que podemos extraer sen x factor común.

$$sen\, x \cdot [1 + 2\cos^2 x + \cos(2x) - 2\cos x - 4\cos x \cdot \cos(2x)] = 0$$

Lo que nos da ya una solución:

$$x = arc\, sen\, 0 = \begin{cases} x = 0^o + 360^o \cdot k \\ x = 180^o + 360^o \cdot k \end{cases} \quad es\ decir\ x = 0^o + 180^o \cdot k\ ,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

Continuamos con el resto de la ecuación. En casi todos los términos aparece el cos x, como nuestro objetivo sigue siendo factorizar, intentamos buscarlo en el resto de términos.

$$1 + 2\cos^2 x + \cos(2x) - 2\cos x - 4\cos x \cdot \cos(2x) = 0$$

En casi todos los términos aparece el cos x, intentamos buscarlo en el resto de términos. Sustituimos el tercer término por la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - sen^2 x = 1 - sen^2 x - sen^2 x = 1 - 2\, sen^2 x \quad \text{[Ec 1]}$$

En la ecuación:

$1 + 2\cos^2 x + 1 - 2\, sen^2 x - 2\cos x - 4\cos x \cdot \cos(2x) = 0$ Sumamos los 1 y podremos sacar factor común el 2:

$$2\cos^2 x + 2 - 2\, sen^2 x - 2\cos x - 4\cos x \cdot \cos(2x) = 0$$

$$2 \cdot [\cos^2 x + 1 - sen^2 x - \cos x - 2\cos x \cdot \cos(2x)] = 0$$

$$\cos^2 x + 1 - sen^2 x - \cos x - 2\cos x \cdot \cos(2x) = \frac{0}{2} = 0$$

Pero $1 - sen^2 x = \cos^2 x$ por tanto: $\cos^2 x + \cos^2 x - \cos x - 2\cos x \cdot \cos(2x) = 0$, es decir:

$2\cos^2 x - \cos x - 2\cos x \cdot \cos(2x) = 0$ y, de nuevo, podemos extraer, en este caso, cos x factor común:

$\cos x \cdot [2\cos x - 1 - 2\cos(2x)] = 0$ Lo que nos da una segunda solución:

$$x = arc\cos 0 = \begin{cases} x = 90º + 360º \cdot k \\ x = 270º + 360º \cdot k \end{cases} es\, decir\ x = 90º + 180º \cdot k\ , \forall k \in \mathbb{Z}$$

Continuamos con el resto de la ecuación.

$2\cos x - 1 - 2\cos(2x) = 0$ Sustituimos el valor de cos de 2x por lo visto en [Ec 1]:

$2\cos x - 1 - 2(1 - 2sen^2 x) = 0$ Es decir, $2\cos x - 1 - 2 + 4 sen^2 x = 0$

$2 \cdot \cos x - 3 + 4 \cdot sen^2 x = 0$ Ya tenemos una ecuación (mucho más simple que la original) con dos razones diferentes, pero con el mismo ángulo, por lo que tratamos de poner una en función de la otra. Ya que $sen^2 x = 1 - \cos^2 x$ sustituimos:

$2\cos x - 3 + 4(1 - \cos^2 x) = 0$; operando: $2\cos x - 3 + 4 - 4\cos^2 x = 0$;

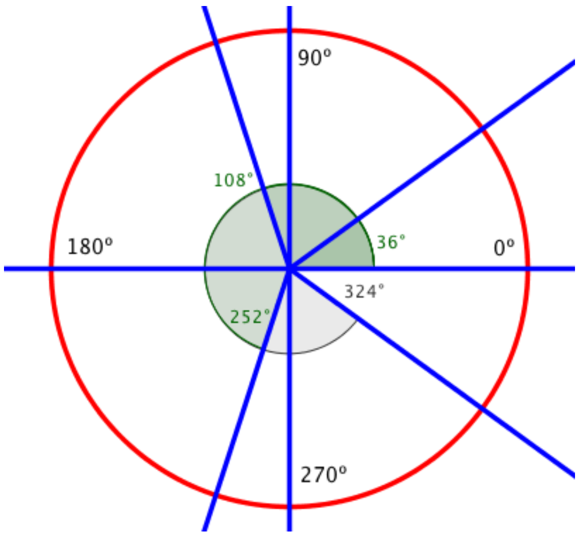
$4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$; ecuación cuadrática que resolvemos mejor con el cambio de variable:

$\cos x = t$; $4t^2 - 2t - 1 = 0$; Soluciones: $t = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{2 \pm 2 \cdot \sqrt{5}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} = \cos x$

Últimas soluciones:

$$x = arc\cos \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \begin{cases} x = 36º + 360º \cdot k \\ x = 324º + 360º \cdot k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$x = arc\cos \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \begin{cases} x = 108º + 360º \cdot k \\ x = 252º + 360º \cdot k \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}$$



Resumen de soluciones para un ángulo entre 0º y 360º:

$$x = 0º, 36º, 90º, 108º, 180º, 252º, 270º, 324º$$